LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

LOS SIMBOLOS DE LA LOGICA MATEMATICA

R. Feys y F. B. Fitch

PARANINFO S.A.

Los símbolos de la Lógica Matemática

ROBERT FEYS †
y
FREDERIC B. FITCH

Los símbolos de la Lógica Matemática

Colección:
LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

PARANINFO SA
1980 - MADRID

Traducido por:
GUILLERMO ROSIQUE PUERTA

© North-Holland Publishing Company-Amsterdam
© de la edición española, Paraninfo, S. A., Madrid (España)
© de la traducción española, Paraninfo, S. A., Madrid (España)

Título original inglés:
DICTIONARY OF SYMBOLS OF MATHEMATICAL LOGIC

Reservados los derechos de edición, reproducción
o adaptación para todos los países de lengua española

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

I.S.B.N.: 0 7204 2250 7 (Edición holandesa)
I.S.B.N.: 84-283-1029-7 (Edición española)
Depósito Legal: Z. 1.048-79

PARANINFO SA Magallanes, 25 - Madrid (15) (3-2730)

COMETA, S. A. — Carretera Castellón, km. 3,400 — Zaragoza (13)

INDICE

Prólogo ... 9
Prefacio del primer editor ... 11
Abreviaturas ... 14

Preliminares ... 15
00. Traducción y significado ... 15
01. Formalización ... 16
02. Significado, denotación y sentido ... 19
03. Constantes y variables ... 20
04. Proposiciones ... 20
05. Formas y funciones ... 22
06. Operadores y variables ligadas ... 28
07. Asignación de significados ... 32
08. Nombres y variables del metalenguaje ... 33
09. Uso de la notación algebraica ... 37

Capítulo 1. Cálculo proposicional ... 39
10. Cálculo proposicional bivalente; una explicación informal ... 39
11. Notación para las tablas veritativas bivalentes ... 44
12. Símbolos del cálculo proposicional ... 45
13. Cálculo proposicional polivalente ... 49
14. Lógicas modales ... 55
15. Sistemas de tipo intuicionista y sistemas afines ... 59
16. Alcance de los operadores lógicos ... 62

Capítulo 2. El cálculo funcional de primer orden ... 68
20. Funciones proposicionales de individuos ... 68
21. Cuantificadores ... 70

22. Tablas de símbolos ... 73
23. Un ejemplo de un cálculo funcional de primer orden ... 74
24. Los cuantificadores en la lógica no clásica ... 76
25. Cálculo funcional de primer orden con identidad ... 78
26. Descripciones definidas ... 78
27. Descripciones cuasi-definidas ... 80

Capítulo 3. Cálculos funcionales de orden superior. La teoría de tipos ... 82
30. Ordenes de cálculos ... 82
31. La teoría de tipos ... 84
32. Indicación explícita de tipo ... 86
33. Indicación implícita de tipo ... 89

Capítulo 4. Lógica combinatoria ... 90
40. Aplicación y abstracción ... 90
41. La notación de lógica combinatoria ... 93
42. Ejemplo de un sistema simple de lógica combinatoria ... 96
43. Combinaciones y la teoría de combinadores ... 97
44. Conversión lambda ... 100
45. Definiciones de combinadores como abstractos ... 103
46. Ulteriores extensiones de lógica combinatoria ... 105

Capítulo 5. Cálculo de clases ... 106
50. Introducción ... 106
51. Variables, abstractos y constantes de clases ... 108
52. Operadores correspondientes a los del cálculo funcional ... 109
53. Funciones de clases para proposiciones ... 110
54. Funciones de clases para clases ... 111
55. Funciones de clases de clases para clases ... 113
56. Cálculo de individuos ... 114

Capítulo 6. Cálculo de relaciones ... 116
60. Propiedades de relaciones análogas a las propiedades de clases ... 116
61. Funciones de relaciones para relaciones que son propias del cálculo relacional ... 120
62. Funciones de clases para relaciones, o de clases y relaciones para relaciones ... 122
63. Funciones de relaciones para clases ... 123

64. Identidad y nociones derivadas de la identidad 125
65. Representación de funciones no-proposicionales por medio de sus relaciones asociadas 129
66. Algunas relaciones y clases importantes adicionales 132
67. Relaciones de más de dos términos 138

Capítulo 7. La Aritmética formalizada como disciplina independiente 140
70. Introducción 140
71. Los axiomas de Peano 140
72. Formulación de la teoría como disciplina independiente ... 141
73. Definición recursiva de suma y multiplicación 141
74. Aritmética recursiva 142
75. Conceptos auxiliares 142
76. Operaciones inversas 143
77. La función μ 144

Capítulo 8. Los números según se definen en sistemas de lógica. 145
80. Introducción 145
81. Las definiciones de números cardinales por similitud 145
82. El método de definición de números de von Neumann 147
83. Operaciones aritméticas con números naturales, definidas por medio del ancestral 148
84. Operaciones aritméticas con números cardinales 149
85. Definición de números de relación por similitud ordinal ... 152
86. Operaciones aritméticas con números de relación 154

Capítulo 9. Metamatemática 156
90. El objeto de la metamatemática 156
91. Variables y constantes metamatemáticas 158
92. Designaciones de clases de símbolos y clases de entidades ... 163
93. Designación de expresiones 164
94. Sustitución 167
95. Demostrabilidad y derivabilidad 168
96. La deducción dentro de un sistema 169

Indice de nombres 173
Indice de símbolos 175
Indice alfabético 181

PROLOGO

Este "Diccionario" de símbolos de lógica matemática se organizó principalmente bajo la dirección del fallecido profesor Robert Feys. El Prefacio se ha conservado esencialmente como él lo escribió y sirve para indicar tanto su concepción del Diccionario como la naturaleza de las aportaciones realizadas al primer proyecto por muchos colaboradores, especialmente el profesor John R. Myhill.

La versión actual es el resultado de una reestructuración extensiva y fundamental del anterior proyecto con el fin de mejorar la claridad de exposición e incrementar, en alguna medida, la uniformidad de convenciones entre las partes escritas por diferentes autores. Se han introducido referencias específicas a las páginas de otros trabajos, cuya falta era ostensible en el primer proyecto. Se han añadido numerosos ejemplos, tales como los ejemplos de conjuntos de axiomas. Se ha añadido mucho material nuevo, y prácticamente se ha reformulado o reemplazado cada frase del proyecto original, a excepción de algunas partes del último capítulo.

No me hago la ilusión de que el resultado agrade a todos los lectores, ni de que el título "Diccionario" sea totalmente adecuado. Emprendí la tarea de elaborar la presente revisión a petición del profesor S. C. Kleene, entonces presidente de la Asociación de Lógica Simbólica. Si bien no participé en las fases previas de planificación y elaboración del Diccionario, espero que todos los esfuerzos anteriores puedan considerarse conducidos a un final satisfactorio.

Cualesquiera que sean las deficiencias de la presente versión, he de responsabilizarme de la mayoría de ellas. Podrían haber sido menos numerosas si mis obligaciones en otros ámbitos no hubiesen sido tantas.

Sin el consejo y ayuda tan generosamente ofrecida por la profesora Patricia James, no podría haberse escrito esta versión del Diccionario, y le estoy extremadamente agradecido. También deseo expresar mi gratitud a los profesores James William Dickoff y Alan R. Anderson por su ayuda y valiosas sugerencias. También debe agradecerse a Bell Telephone Laboratories, de Murray Hill, New Jersey, la ayuda económica que facilitó para la financiación parcial del proyecto. El profesor Alonzo Church hizo muchas sugerencias útiles y críticas que se tuvieron en cuenta en la etapa final de revisión, e igualmente le expreso mi gratitud.

Frederic B. Fitch

PREFACIO DEL PRIMER EDITOR

No empezaremos por una definición de "lógica matemática" o "lógica simbólica". Nos contentamos con intentar dar una traducción de los símbolos considerados usualmente como símbolos de lógica matemática.

El propósito del presente "Diccionario" es permitir al lector encontrar con cierta facilidad el significado y la interpretación de los símbolos usados corrientemente en lógica matemática (lógica simbólica). El criterio de "uso corriente" en lógica matemática es el siguiente. El Diccionario incluye (1) símbolos usados en los manuales recientes, mencionados más adelante en la lista de abreviaturas, (2) símbolos usados en muchos de los artículos de *The Journal of Symbolic Logic* desde 1950 en adelante, y (3) algunas notaciones que se han tomado de otras fuentes y artículos.

Este Diccionario está dirigido a aquellos lectores que no tienen conocimientos previos de lógica matemática así como a aquellos lógicos que quieren una explicación de una notación que está fuera de sus campos habituales. El profano en lógica podría esperar encontrar aquí una traducción verbal directa para cada símbolo, como en un diccionario normal. Sin embargo, sería erróneo, especialmente para él, el limitarnos a lo que sería un intento de traducción. Tal procedimiento podría corfirmar a este profano en lógica (o lógica matemática) en el extendido error de que los símbolos lógicos son simplemente una especie de taquigrafía para las ideas, cuyo contenido exacto puede entenderse intuitivamente. Ello podría conducirle así a pasar por alto el hecho esencial de que el lenguaje de la lógica matemática no es como otros lenguajes, sino más bien el lenguaje de una teoría *formalizada.*

Ser una teoría formalizada significa que pueden hacerse deducciones sin referirse en absoluto a lo que pueda ser el significado de los símbolos

del sistema. También significa que los posibles significados de los símbolos están sólo *implícitos* en los axiomas (teoremas primitivos), reglas, y definiciones del sistema, y que pueden hacerse explícitos sólo hasta cierto punto haciendo referencia otra vez a los axiomas, reglas y definiciones. Por este motivo, el presente Diccionario consta de una *explicación sistemática* del significado de cada símbolo, discutido en el contexto del sistema formalizado correspondiente. En el *Indice de Símbolos* se hace referencia a las secciones de esta explicación sistemática. Las discusiones que se encuentran en las secciones indicadas, proporcionarán al lector intentos de traducciones verbales y sugerencias para evitar posibles errores. Las explicaciones no pretenden dar nunca una solución definitiva del problema del significado, sino sólo los elementos de tal solución.

Los símbolos metamatemáticos del Capítulo 9 son los únicos que se usan en un sentido intuitivo y tienen un significado que no necesita inferirse a partir de un sistema axiomático. Pero incluso en este caso lo que más se necesita es una explicación, y no una mera traducción, ya que el significado propuesto puede ser complejo y técnico.

Podría indicarse una última dificultad. La notación de la lógica matemática reciente dista mucho de ser uniforme. No sólo debemos tener en cuenta una gran variedad de sistemas formalizados con notación similar, sino que debemos reconocer el hecho de que diferentes autores expresan frecuentemente la misma idea por medio de símbolos diferentes y que el mismo símbolo se emplea con distintos sentidos por diferentes autores. Naturalmente, ésta no es una situación muy satisfactoria, pero no es de nuestra incumbencia expresar la preferencia de una notación cualquiera sobre otra, ni discutir la posibilidad de una notación unificada.

Tal situación requiere una indicación práctica final relativa al uso de este Diccionario. El vocabulario simbólico de lógica matemática —especialmente el más usual— no es muy extenso. Pero tenemos que enfrentarnos con simbolismos distintos y no sólo con uno, e incluso con alfabetos ideográficos más o menos coincidentes. Esto hace imposible para un usuario del Diccionario *encontrar* una traducción ni siquiera mediante algún procedimiento mecánico tal como el uso del orden lexicográfico. Incluso para textos "clásicos" el usuario necesitará tener una idea previa del tipo de notación usada en el texto que se traduce (esto puede sugerirlo entre otras cosas la nacionalidad del autor), y también puede ser útil tener en cuenta el tipo de lógica que se considera.

La publicación de este Diccionario se emprendió por sugerencia del Sr. Paul Carus, y los gastos de impresión fueron costeados por la Edward

C. Hegeler Trust Fund, por lo que le expresamos aquí nuestro aprecio y agradecimiento. También agradecemos la ayuda que nos ha proporcionado el Belgian Centre de Recherches de Logique.

Las gestiones preparatorias de la composición del Diccionario se llevaron a cabo por un comité formado por los profesores Barlaz, Beth (Presidente), Church, Myhill, Quine y Scholz. El actual comité editorial [1957] consta de los profesores Barlaz, Beth, Church, Feys (Presidente) y Myhill.

Este Diccionario es en gran parte obra del profesor Myhill, de Berkeley, quien estableció su plan y escribió en su totalidad los capítulos fundamentales 1 y 9. El profesor Hailperin escribió un primer borrador de los capítulos 2 y 3. Deseamos agradecer a los profesores E. W. Beth, W. T. Parry, J. Dopp y al Dr. Ladrière sus amables revisiones del presente texto, y a la Sra. De Permentier y a la Srta. Chavasse su ayuda en prepararlo.

Robert Feys.

ABREVIATURAS

A través de todo este Diccionario se usan las abreviaturas siguientes:

[CF] por Curry y Feys, *Combinatory Logic*
[Ch] por Church, *Mathematical Logic*
[F] por Fitch, *Symbolic Logic*
[HA] por Hilbert y Ackermann, *Principles of Mathematical Logic*
[HB] por Hilbert y Bernays, *Grundlagen der Mathematik* — i, ii
[K] por Kleene, *Introduction to Metamathematics*
[PM] por Russell y Whitehead, *Pricipia Mathematica*
[Q] por Quine, *Mathematical Logic*
[R] por Rosser, *Logic for Mathematicians.*

Se hace referencia a otros libros del mismo modo en que suele hacerse en *The Journal of Symbolic Logic.* De este modo, 1085 se refiere al pasaje así numerado en la Bibliografía que se encuentra en el Volumen 1, pp. 121-128, y en el Volumen 3, pp. 178-212 del *Journal.* II 37 se refiere al libro o artículo cuya reseña empieza en la página 37 del volumen II del *Journal.* Cuando el trabajo en cuestión es un libro, se incluirán los números de las páginas; si el trabajo es un artículo no se hace referencia alguna a las páginas.

PRELIMINARES

00. Traducción y significado

00.1. El propósito normal de un diccionario escrito en un lenguaje L acerca de un lenguaje L' es proporcionar una *traducción* de las palabras de L' mediante las palabras de L. Las palabras pueden agruparse, y algunos de estos grupos constituirán las frases. Un lenguaje puede considerarse como una colección de frases, cada una de las cuales se forma reuniendo palabras y usando signos de puntuación. El lenguaje de la lógica simbólica usa símbolos especiales en vez de palabras ordinarias, y las frases de lógica simbólica se forman reuniendo estos símbolos de acuerdo con principios específicos o reglas gramaticales.

00.2. Para explicar el significado de estas frases de lógica simbólica podría parecer suficiente asignar a cada símbolo una palabra castellana que sería su traducción. Así, si L es el castellano y L' es el lenguaje de la lógica simbólica, entonces cada símbolo de L' se traduciría por una palabra de L. Pero también es muy importante algún conocimiento de la gramática de L' para explicar los significados de las frases de L'. Incluso si L' fuese un lenguaje ordinario, en vez de un lenguaje simbólico, se requeriría algunos conocimientos de la gramática de L', incluyendo reglas de declinación y conjugación, reglas sintácticas de formación de frases, y reglas relativas al contexto. La enunciación de estas reglas es necesaria porque la traducción de una expresión dada depende del hecho de que algunas ideas no se expresen por la mera adición de palabras, sino por el orden de las mismas, por el uso de los signos de puntuación y por el contexto. En la mayoría de los diccionarios se omite la enunciación de tales reglas porque se supone que los diccionarios se usan junto con gramáticas apropiadas y porque, con frecuencia, las reglas gramaticales de

L y *L'* son similares. Sin embargo, el presente Diccionario debe proporcionar ampliamente su propia información gramatical, y su propósito es ayudar a traducir textos simbólicos escritos en un lenguaje formal cuya gramática difiera en gran medida de la gramática del lenguaje ordinario hablado.

00.3. Un diccionario explicativo intenta aclarar el significado de las palabras o símbolos. Se pretende que este Diccionario sea a la vez un diccionario de traducción y de explicación. De hecho, se requieren explicaciones de significados si un diccionario ha de proporcionar algo más que burdas traducciones, ya que las palabras o símbolos de un lenguaje dado, *L'*, raramente tienen equivalentes literales en un lenguaje de traducción, *L*, hasta el punto de que tales equivalentes puedan sustituirse simplemente por las palabras o símbolos correspondientes de *L'* en una traducción palabra por palabra. Esto es especialmente cierto si el lenguaje traducido, *L'*, es el lenguaje de la lógica simbólica, como ocurre en este Diccionario. Estas explicaciones de los significados incluirán discusiones sobre la estructura gramatical del lenguaje de la lógica simbólica.

00.4. Este Diccionario difiere, también, del diccionario corriente en el hecho de que se ocupa de muchos lenguajes y no de uno solo. En un sentido, no hay realmente *un* lenguaje de lógica simbólica, sino más bien muchos lenguajes de lógica simbólica. Cada sistema formalizado de lógica es en sí mismo un lenguaje. Este hecho debe tenerse en cuenta aun cuando no señalemos constantemente las sutiles diferencias de significado entre símbolos de sistemas distintos. También debería tenerse en cuenta que algunas de las explicaciones generales dadas en estas secciones introductorias pueden no ser adecuadas a algunos sistemas especiales. Naturalmente, no se pretende que este Diccionario sea en absoluto exhaustivo con respecto a los tipos de sistemas lógicos o de símbolos que se consideran. Sólo se pretende que trate sobre algunos de los sistemas y notaciones lógicas más conocidos.

01. Formalización

01.1. Este Diccionario trata exclusivamente de *lenguajes formalizados* de distintos sistemas de lógica simbólica, es decir, de *sistemas deductivos formalizados*. En cada lenguaje formalizado debemos poder especificar qué símbolos se usan, cómo se combinan para formar fórmulas, y qué fórmulas deben considerarse como demostrables en ese lenguaje.

01.11. De modo más preciso, un lenguaje formalizado se define por medio de *reglas de formación* y *reglas de transformación.* Las reglas de formación especifican (1) la clase de los *símbolos primitivos* del lenguaje, es decir, los símbolos del lenguaje que no se componen de otros símbolos del lenguaje, y (2) la clase de las *expresiones compuestas* que se construyen sistemáticamente a partir de los símbolos primitivos de acuerdo con principios de construcción descritos explícitamente. Generalmente las expresiones compuestas (junto con algunos símbolos primitivos) se denominan *fórmulas bien formadas* (o simplemente *fórmulas*) del lenguaje. El término "bien formada" se abrevia con frecuencia como "bf", y el término "fórmula bien formada" como "fbf". Normalmente, entre las fbfs de un lenguaje habrá algunas, y a veces todas, que pueden considerarse susceptibles de ser aseveradas. Estas son las *sentencias.* Las reglas de formación, además de especificar qué expresiones son bf y cuáles no, también proporcionarán con frecuencia alguna clasificación de las fbfs. En particular, si hay que realizar una distinción entre sentencias y fbfs, las reglas de formación deben proporcionarla.

01.12. Además de las reglas de formación, también se necesitan las reglas de transformación. Las reglas de transformación se usan para especificar (1) cuándo una sentencia es *consecuencia* de una o más sentencias distintas, y (2) cuándo una sentencia es un *teorema.* (Como sugirió Carnap, es posible subsumir (2) en (1) si nos permitimos hablar de consecuencias de la clase vacía de sentencias.) Un caso especial de (1) es el relativo a un tipo especial de consecuencia llamado *consecuencia directa.* Un caso especial de (2) es el relativo a un tipo especial de teoremas llamados *axiomas.* (Si se sigue la sugerencia de Carnap, entonces los axiomas podrían considerarse como consecuencias directas de la clase vacía de sentencias.) Las reglas que especifican cuándo una sentencia es una consecuencia directa de una o más sentencias distintas pueden llamarse también *reglas no derivadas de inferencia.* Estas son las reglas que se usan, en un sentido primario, para derivar teoremas a partir de axiomas y de otros teoremas. La forma más común de especificar la clase de los teoremas es la siguiente. En primer lugar se especifican los axiomas y se consideran como teoremas en un sentido trivial. Después, toda sentencia que sea una consecuencia directa de otros teoremas por la aplicación de una de las reglas no derivadas de inferencia, se considera también como teorema. En un sistema que emplea axiomas, la situación frecuente es que algunos teoremas son axiomas, otros son consecuencias directas

de los axiomas, en tanto que otros son consecuencias, pero no consecuencias directas, de axiomas.

01.13. Ni las reglas de formación ni las de transformación incluyen o dependen de cualquier interpretación de las expresiones del lenguaje. Estas reglas se ocupan exclusivamente de la definición de clases de expresiones (tales como la clase de las fbfs y la clase de los teoremas) o de las relaciones importantes entre expresiones, pero totalmente independiente del significado que eventualmente pueda asignarse a las expresiones en cuestión. En otras palabras, se ocupan de la *sintaxis* (o estructura formal) del lenguaje, y en absoluto de la *semántica* del lenguaje (es decir, el análisis de la relación entre las expresiones del lenguaje y su significado). Sin embargo, si tratamos de un lenguaje en sentido propio, en vez de, simplemente, un *sistema logístico* o *cálculo,* debe haber una asignación de *significados,* en algún sentido de esta palabra; y cualquier discusión sobre esto se facilita en gran medida por el conocimiento de las reglas de formación y transformación del lenguaje, es decir, por el conocimiento de la gramática o estructura del lenguaje.

01.14. La asignación efectiva de significados a las fbfs de un lenguaje formalizado (y por tanto al lenguaje mismo) puede hacerse por medio de discusiones informales y explicaciones, como se hace en este Diccionario, o bien, en ciertos casos muy simples o ideales, por medio de lo que Carnap (XIV 237) ha llamado *reglas semánticas.* Así, por una parte, las reglas de formación y transformación proporcionan la sintaxis de un lenguaje formalizado, mientras que, por otra parte, las discusiones informales interpretativas, o quizá las reglas semánticas formales, proporcionan la semántica del lenguaje formalizado. Si no se proporciona ninguna semántica, las reglas de formación y transformación dan lugar meramente a un sistema sin interpretación de símbolos y expresiones. Un sistema así puede llamarse sistema logístico (sin interpretación) o cálculo (sin interpretación). Si se proporcionan dos o más interpretaciones de un cálculo de este tipo, se definen de ese modo dos o más lenguajes, pero exactamente con la misma sintaxis. La pertenencia de la clase de las fbfs y la pertenencia de la clase de los teoremas no se alteran en ningún modo por este proceso de interpretación o asignación de significado, porque tal pertenencia está fijada previamente por las reglas de formación y transformación.

02. Significado, denotación y sentido

02.1. La teoría de Frege (498) y Church ([Ch] 4ff.) se usa con frecuencia en el tratamiento de los significados de las fórmulas de lenguajes formalizados. Esta teoría puede expresarse toscamente del modo siguiente: una palabra, frase o fórmula puede ser el nombre de algo, y si lo es, entonces, sea lo que sea lo nombrado, se dice que esto es su *denotación,* y se dice que el nombre denota ese objeto. Además, una palabra, frase o fórmula que no sea nombre de nada, puede aún ser significativa y comprensible y por lo tanto puede decirse que tiene *sentido.* Así la frase 'la montaña de oro macizo', no tiene denotación. Pero tiene sentido. Un cuento de hadas que contenga la frase 'El príncipe, tras cabalgar muchos días, llegó por fin a la montaña de oro macizo' puede muy bien ser perfectamente inteligible en cuanto a su sentido. Y sin embargo esta frase, a causa del uso de un nombre sin denotación, será fácticamente falsa o caerá en la categoría de ni verdadera ni falsa (no necesitamos intentar decidir aquí qué valor veritativo tendría). En alemán los términos de Frege son 'Sinn' para sentido y 'Bedeutung' o 'Bezeichnung' para denotación. Estos se han traducido al inglés de formas muy variadas. Generalmente se ha usado 'sense' (sentido) para 'Sinn'; pero Russell (1116) usa 'meaning' (significado). Otras palabras usadas en vez de 'denotación' son 'designatum' (que es la latinización literal de 'Bezeichnung') y 'reference' (referencia), esta última empleada por algunos autores recientes. En resumen, esta opinión sostiene que una palabra, frase o fórmula puede tener sentido y denotación a la vez, o puede tener sentido sin denotación, aunque Frege recomendó que, como una cuestión práctica, deben evitarse los nombres sin denotación en la construcción de un lenguaje formalizado. (A veces, la teoría de Frege-Church no sólo ofrece el argumento que se expone de nombres sin denotación, sino que también ofrece el siguiente argumento: dos frases que aparentemente tengan diferente significado pueden denotar sin embargo el mismo objeto, y es difícil ver cómo puede ocurrir esto a menos que distingamos entre sentido y denotación. Por ejemplo, la frase 'estrella de la mañana' y la frase 'estrella de la tarde' denotan ambas al planeta Venus, pero parecen tener diferentes significados. Estos argumentos distintos, aunque son muy persuasivos, no necesitan considerarse como excluyentes de una posición alternativa mantenida por Russell).

02.2. Un método debido a Russell (1119, y 24.36 siguiente), conocido como *teoría de las descripciones de Russell,* acentúa la noción de *defi-*

nición contextual y hace posible, en la mayoría de los casos, una consideración del significado que prescinde del sentido en favor de la denotación, admitiendo, al menos, que hay palabras, frases o fórmulas para *denotar propiedades* tales como la propiedad de ser una montaña de oro macizo y la propiedad de ser la estrella de la mañana.

03. Constantes y variables

03.1. Los lenguajes no formales usan *nombres propios.* Los lenguajes formales también pueden usarlos. Estos nombres propios, en el caso de los lenguajes formales, son símbolos o fórmulas y se llaman *constantes.* Cuando se interpreta un lenguaje formal, es corriente especificar las denotaciones de las constantes. Entre los objetos que pueden denotarse mediante constantes están las clases, propiedades, relaciones, proposiciones, individuos, etc.

03.2. Muchos lenguajes formales hacen un uso considerable de las *variables,* aunque algunos sistemas de lógica las evitan totalmente (cp. 42.2, 45.6). Las variables, como las constantes, pueden considerarse como nombres, pero como nombres de alguna manera diferentes. Una variable denota o nombra *indeterminadamente* cualquiera de los objetos *distintos* que se llaman *valores* de la variable y que colectivamente abarcan el *rango* de la variable. Así alguna clase de individuos podría constituir el rango de una variable, y alguna clase de clases (o alguna clase de propiedades, relaciones, funciones, o proposiciones) podría constituir el rango de otra variable. En la interpretación de un lenguaje formalizado es común especificar los respectivos rangos de las distintas variables del lenguaje, así como especificar los respectivos objetos denotados por las diferentes constantes del lenguaje.

04. Proposiciones

04.1. Además de las constantes y variables, descritas anteriormente, la lógica simbólica también usa expresiones que pueden llamarse *sentencias* o *sentencias formales* (cp. 01.11) y que puede considerarse que expresan *proposiciones.* Un modo de incluir las sentencias en una teoría del significado es considerarlas, al igual que Frege (498) y Church ([Ch] 23 ff.) como nombres de *valores veritativos.*

04.2. Normalmente, puede suponerse que una sentencia declarativa de un lenguaje no formalizado expresa alguna verdad o falsedad, es decir, alguna proposición verdadera o alguna proposición falsa. En muchos lenguajes formalizados se da la misma situación. Por tanto, normalmente se acuerda que una sentencia de un lenguaje formalizado tiene uno de los *valores (valores veritativos) verdad* o *falsedad.* En el uso gramatical del inglés, una frase no es el nombre de nada. De modo similar, en el caso de muchos lenguajes formalizados, las sentencias no se consideran como nombres, sino que *expresan proposiciones* sin servir como nombres de las proposiciones que expresan. En la teoría de Frege-Church tampoco se consideran las sentencias como nombres de proposiciones. Al contrario, se consideran como nombres de valores veritativos de las sentencias. En esta teoría se dice que el *sentido* de una sentencia es lo mismo que la proposición expresada por la sentencia. Así, en la teoría de Frege-Church, una sentencia tiene como sentido una proposición, y como denotación su valor veritativo (verdad o falsedad). Así como decimos que las sentencias tienen valores veritativos, del mismo modo podemos decir que las proposiciones tienen (en un sentido algo diferente de 'tener') valores veritativos. Más específicamente, una proposición tendrá el mismo valor veritativo que el que tenga la sentencia que exprese dicha proposición.

04.3. Así pues, en la teoría de Frege-Church, una sentencia denota (es el nombre de) uno de los valores veritativos verdad y falsedad, y connota (tiene como sentido) una proposición. En esta teoría, sentencias que tienen la misma denotación pueden diferir en la connotación. Las sentencias siguientes, '2 = 2', y 'la Tierra es un planeta', son ambas verdaderas, y así denotan verdad, pero difieren en el sentido, es decir, expresan proposiciones diferentes. (Adviértase el parecido entre este ejemlo y el ejemplo de las frases 'estrella de la mañana' y 'estrella de la tarde' al final del apartado 02.1).

04.4. Sin embargo, como alternativa a la teoría de Frege-Church, es posible considerar las sentencias como nombres de proposiciones en vez de como nombres de valores veritativos, y tratar los valores veritativos simplemente como propiedades de las proposiciones. Así el valor veritativo verdad se consideraría como una propiedad que poseen todas las proposiciones verdaderas, mientras el valor veritativo falsedad se consideraría como una propiedad que poseen todas las proposiciones falsas. El hecho de que la gramática inglesa no considere generalmente las sentencias como sustantivos no choca necesariamente contra esta po-

sición en el caso de los lenguajes formalizados. Al menos existe un lenguaje natural muy usado, el chino, que parece usar las sentencias como sustantivos.

04.5. Como otra alternativa a la teoría de Frege-Church, podemos considerar las sentencias como nombres de proposiciones, como en la alternativa anterior, pero tratar los valores veritativos como proposiciones en vez de como propiedades de las proposiciones. Es necesario suponer, en primer lugar, que se han definido ya algunos conceptos de *equivalencia* entre proposiciones. Suponemos que, correspondiendo a cada proposición p, hay una proposición equivalente, $*p$, que se llama *valor veritativo* de p. Así toda proposición es equivalente (pero no necesariamente idéntica) a su valor veritativo. A lo sumo hay un valor veritativo para una proposición dada, y cada valor veritativo es en sí mismo una proposición. Si dos proposiciones p y q son equivalentes, podrá suponerse que tienen el mismo valor veritativo, es decir, que $*p = *q$. Si el tipo de equivalencia que usamos es el más amplio, llamado *equivalencia material* (10.46), entonces dos proposiciones verdaderas cualesquiera serán mutuamente equivalentes en este sentido amplio, y dos proposiciones falsas cualesquiera también serán mutuamente equivalentes. Por tanto todas las proposiciones verdaderas, siendo mutuamente equivalentes, tendrán el mismo valor veritativo, llamado *verdad,* y todas las proposiciones falsas, siendo mutuamente equivalentes, tendrán el mismo valor veritativo, llamado *falsedad.* Pero verdad y falsedad serán en sí mismas proposiciones.

05. Formas y funciones

05.1. Distingamos en primer lugar entre expresiones *propias* e *impropias.* Las expresiones propias, tales como los nombres, tienen significado aisladamente, pero las expresiones impropias, tales como los paréntesis y algunas conectivas, no tienen significado aisladamente. Las expresiones *compuestas* se construyen usualmente combinando a la vez expresiones propias e impropias, y pueden ser a su vez propias o impropias. En el caso más simple, se combinan una o más constantes con paréntesis y conectivas ([Ch] 32) según ciertas reglas para obtener expresiones compuestas propias. Por ejemplo, si la letra 'a' denota la clase de los seres racionales y la letra 'b' denota la clase de los animales, podríamos usar la expresión compuesta '$a \cap b$' para denotar la clase de los seres que pertenecen tanto a a como a b, es decir, para denotar la clase de los animales racionales. (Las comillas simples no son parte de la notación

a que se hace referencia. Indican simplemente que estamos hablando acerca de las expresiones colocadas entre ellas: véase 08.)

05.2. Si en una expresión compuesta reemplazamos una constante por una variable, y si la constante reemplazada denota algo perteneciente al rango de la variable, entonces la expresión compuesta resultante puede llamarse *forma* ([Ch] 10). De un modo similar pueden reemplazarse varias constantes por variables para producir una forma. Supongamos, por ejemplo, que '*u*' y '*v*' se están usando como variables de un tipo adecuado, y que en la expresión 'animal y racional' reemplazamos los sustantivos 'animal' y 'racional' por '*u*' y '*v*' respectivamente para obtener la expresión '*u* y *v*'. Entonces la expresión '*u* y *v*' es una forma. De modo similar podemos obtener la forma '$u \cap v$' a partir de la expresión '$a \cap b$', suponiendo que '*a*' y '*b*' son constantes que denotan objetos que pertenecen a los rangos de '*u*' y '*v*' respectivamente.

05.3. La lógica formalizada trata en gran medida de *funciones,* ejemplos de las cuales son las funciones corrientes que se encuentran en las matemáticas. Debemos distinguir entre funciones de *un argumento,* funciones de *dos argumentos,* funciones de *tres argumentos,* y así sucesivamente. Empezamos considerando funciones de un argumento. Asociado a cada función de un argumento hay un *rango de argumentos* para esa función (denominada también frecuentemente *dominio de la definición* de la función). Si *a* pertenece al rango de argumentos de una función *f,* y por tanto puede servir como un argumento de *f,* entonces *f* puede aplicarse a *a* para producir *f*(*a*), que se llama *valor* de la función *f* para el argumento *a.* Por ejemplo, el número 0 pertenece al rango de argumentos de la función coseno, de modo que podemos aplicar esta función al argumento 0 para producir cos(0), que es 1; y por tanto 1 es el valor de la función coseno para el argumento 0, es decir, cos(0) = 1. Si '*x*' se usa como una variable, entonces la notación 'cos(*x*)' (o 'cos *x*') se usa a veces como un nombre de la función coseno, y 'sen(*x*)' (o 'sen *x*') se usa a veces como un nombre de la función seno, etc., aunque estrictamente hablando 'cos' y 'sen' son nombres correctos abreviados de estas funciones. Las expresiones 'cos(*x*)' y 'sen(*x*)' deberían considerarse más bien como *formas* (05.2) asociadas a esas dos funciones respectivamente, en vez de como sus nombres. En general, si una variable tiene como rango el rango de argumentos de alguna función, podemos escribir esta variable en lugar del argumento después del nombre de la función, y el resultado es una forma asociada a la función. Así si '*f*' se

usa como el nombre de alguna función y si 'x' se usa como una variable cuyo rango es el mismo que el rango de argumentos de esta función, entonces la expresión '$f(x)$' es una forma asociada a esa función. También debería advertirse que la clase de todos los valores que toma una función para los distintos argumentos de su rango de argumentos puede llamarse *rango de valores* de la función.

05.4. Una forma asociada a una función del modo antes descrito puede llamarse *forma asociada* de la función. Realmente hay un modo algo más general de construir formas asociadas de funciones. El método puede explicarse fácilmente por medio de un ejemplo. Supongamos que la expresión '$f(x)$' es una forma asociada de una función f en el sentido ya descrito, donde 'x' se usa como una variable cuyo rango es el rango de argumentos de f. Supongamos también que la ecuación siguiente es verdadera cuando quiera que 'x' se reemplace en todas partes por el nombre de un miembro del rango de 'x':

$$f(x) = x^2 + 9x + 20.$$

En otras palabras, supongamos que siempre que 'x' se reemplaza por el nombre de uno de sus valores en la expresión

$$x^2 + 9x + 20,$$

el resultado es un nombre del valor de f para ese valor de la variable tomada como argumento. Entonces no sólo podemos considerar la expresión '$f(x)$' como una forma asociada de la función f, sino que también podemos considerar la expresión '$x^2 + 9x + 20$' como una forma asociada de la función f. Así puede haber numerosas expresiones que sean formas asociadas de una función dada, pero todas son equivalentes entre sí en un sentido importante.

05.5. En el caso de funciones de dos argumentos debemos aplicar la función a un par ordenado de argumentos. Así si f es una función de dos argumentos, decimos que $f(a, b)$ es el valor de f para el par ordenado de argumentos, a, b. El *rango de argumentos* (o *dominio de la definición*) de una función de dos argumentos es por lo tanto una clase de pares ordenados, que consta de todo par ordenado al que puede aplicarse la función para producir un valor de la función. Puede decirse que los primeros miembros de tales pares ordenados constituyen el *rango del primer argumento secundario* de tal función, mientras los segundos miembros

de tales pares ordenados puede decirse que constituyen el *rango del segundo argumento secundario* de tal función. Una forma asociada de una función de dos argumentos requiere dos variables, la primera de las cuales tiene como rango el rango del primer argumento secundario de la función, y la segunda tiene como rango el rango del segundo argumento secundario de la función. De un modo similar pueden tratarse las funciones de tres o más argumentos. Así el rango del argumento de una función de tres variables es una clase de triples ordenados; y en general, una función de n argumentos (donde $n = 2, 3, 4, \ldots$) tiene como rango de argumentos una clase de n-tuplos ordenados. Todos los primeros miembros de estos n-tuplos constituyen el rango del primer argumento secundario de la función, todos los segundos miembros de estos n-tuplos constituyen el rango del segundo argumento secundario de la función, y, en general, todos los k-ésimos miembros de estos n-tuplos constituyen el rango del k-ésimo argumento secundario de la función. Una forma asociada de una función de tres variables debe contener tres variables, cuyos rangos son respectivamente los rangos de los tres argumentos secundarios de la función. Además, las variables deben tener algún orden previamente asignado, tal como el orden alfabético ordinario, de modo que se entenderá que la primera variable del orden (alfabético), aunque quizá no sea la variable situada más a la izquierda de la forma asociada, corresponde al primer argumento de la función, y la segunda variable del orden (alfabético) se entenderá que corresponde al segundo argumento de la función, y así sucesivamente. Considérese, por ejemplo, el caso relativamente simple de las funciones de dos argumentos. Supongamos que f y g son funciones de dos argumentos y que las ecuaciones siguientes son válidas para todos los números a y b de los respectivos rangos del primer y segundo argumento secundario de las dos funciones:

$$f(a, b) = 2 + a^2b,$$
$$g(a, b) = 2 + b^2a.$$

Entonces si nuestras variables están ordenadas alfabéticamente, la expresión '$2 + x^2y$' sería una forma asociada de f pero no de g, en tanto que la expresión '$2 + z^2w$' sería una forma asociada de g pero no de f. Suponemos que 'w', 'x', 'y' y 'z' se usan aquí como variables cuyos rangos son respectivamente el rango del primer argumento secundario de g, el rango del primer argumento secundario de f, el rango del segundo argumento secundario de f y el rango del segundo argumento secundario de g.

05.6. El *principio de extensionalidad de funciones* establece que si dos funciones tienen el mismo rango de argumentos y tienen el mismo valor para cada miembro de ese rango, entonces son la misma función. Este principio se cumple en la mayoría de los sistemas clásicos de lógica matemática, pero también hay sistemas de interés en los que no se cumple, al menos en su versión más general.

05.7. Las *propiedades* pueden considerarse como funciones de un argumento que tienen como valores proposiciones. Así las propiedades se han denominado a veces *funciones proposicionales.* Más específicamente, por ejemplo, cualquier propiedad de individuos puede considerarse como una función de un argumento cuyo rango de argumentos es una clase de individuos y cuyo rango de valores es una clase de proposiciones. (Entendemos aquí por *individuos* cosas tales como objetos físicos, acontecimientos, personas, etc., y toscamente hablando, cualquier cosa distinta de las proposiciones y funciones. Sin embargo, a veces el término *individuo* se usa de un modo más amplio aún, como en 20.1.) Denotemos mediante '*f*' la propiedad azul, y mediante '*a*' el cielo. Entonces la sentencia '*f*(*a*)' expresaría la proposición el cielo es azul. Esta proposición, *f*(*a*), sería el valor de la función (y en este caso, propiedad) azul cuando cielo se usa como el individuo que sirve como argumento. Además, *f* (la propiedad azul) es una función *proposicional,* ya que sus valores son proposiciones. Supongamos, ahora, que '*x*' se usa como una variable cuyo rango es la clase de todos los individuos de los que podríamos predicar de un modo concebible distintos colores. Entonces el rango de '*x*' podría considerarse como el mismo que el rango de argumentos de la función proposicional (o propiedad) azul, y la expresión '*f*(*x*)' podría considerarse como una forma asociada a esta misma función proposicional. Una forma de este tipo, asociada a una función proposicional, puede llamarse *forma proposicional.* Adviértase que las formas proposicionales son obtenibles normalmente a partir de sentencias reemplazando simplemente las constantes por las variables apropiadas. (A veces se ha usado el término *función proposicional* para mencionar lo que aquí se ha llamado formas proposicionales. Aquí se ha evitado tal terminología por conducir posiblemente a confusión). Con frecuencia se usa el término *atributo* como sinónimo del término *propiedad.* Además de las propiedades de individuos, se supone normalmente que hay también propiedades de funciones y propiedades de proposiciones. Así se supone que las propiedades mismas (esto es, las funciones proposicionales) tienen propiedades. La pro-

piedad de ser una propiedad es, por ejemplo, una propiedad que tienen todas las propiedades. La propiedad verdad es una propiedad que tienen algunas proposiciones y que otras no tienen.

05.8. Así como los valores veritativos pueden considerarse como proposiciones de un tipo especial (04.5) también las *clases* (o *conjuntos*) pueden considerarse como propiedades de un tipo especial. Bajo esta consideración, a cada propiedad f le corresponde una propiedad especial llamada *extensión de* f o *clase definida por* f. Así, por ejemplo, la clase de los objetos azules es la extensión de la propiedad azul. En otras palabras, es la clase definida por la propiedad azul. Las clases difieren de las propiedades de otro tipo en ser tales que si dos de ellas tienen exactamente los mismos miembros (esto es, son propiedades de los mismos objetos exactamente), entonces esas dos clases son idénticas entre sí, y por tanto son la misma clase y no realmente dos. Este último principio se llama *principio de extensionalidad de clases*. Es derivable a partir del principio de extensionalidad de funciones (05.6) y la consideración acerca de valores veritativos hecha en 04.5, con tal de que por equivalencia entendamos equivalencia material (10.46) y por clases entendamos funciones proposicionales (propiedades) de un argumento que tomen como valores sólo aquellas proposiciones especiales que son valores varitativos. Por otra parte, la diferencia esencial entre clase y propiedad no se expresa en la teoría del significado de Frege-Church diciendo que una clase es una propiedad de un tipo especial, sino diciendo que una clase es la denotación de cualquier cosa que tenga como sentido o connotación una propiedad definitoria de la clase, de modo que las clases y los valores veritativos son denotaciones, mientras las propiedades y proposiciones son sentidos o connotaciones. Para una información más exacta y adecuada de la teoría de Frege-Church, se advierte, no obstante, al lector para que se remita a los escritos de Frege y Church.

05.9. Las *relaciones mismas* (*N. del T.*) (o *relaciones en intensión,* pueden considerarse como funciones proporcionales de dos o más argumentos. Así una relación misma de n-términos es una función proposicional de n argumentos, donde $n > 1$. Así como las propiedades cuya totalidad de valores son valores veritativos se llaman clases, aquellas relaciones mismas cuya totalidad de valores son valores veritativos se llamarán sim-

N. del T. — Cuando el contexto ha exigido respetar el empleo en inglés de dos términos (*relationship* y *relation*) que, en principio, se traducirían en castellano por un mismo término (*relación*), se han traducido los dos términos indicados, respectivamente, por *relación misma* y *relación*.

plemente *relaciones* (o *relaciones en extensión*). Así, en la terminología presente, las relaciones corresponden a las relaciones mismas así como las clases corresponden a las propiedades y así como los valores veritativos corresponden a las proposiciones. (En realidad, podemos considerar las clases como relaciones de un término y las propiedades como relaciones mismas de un término. Además, podemos considerar los valores veritativos como relaciones de cero términos y las proposiciones como relaciones mismas de cero términos). Si dos relaciones relacionan los mismos objetos exactamente y del mismo modo, entonces esas relaciones son idénticas entre sí y por tanto son una y la misma relación. Este principio se llama *principio de extensionalidad de relaciones*. Es derivable esencialmente del mismo modo que el principio de extensionalidad de clases. Con frecuencia las relaciones pueden considerarse convenientemente como clases de pares ordenados (parejas ordenadas) en el caso de relaciones de dos términos (60.1), o como clases de n-tuplos ordenados en el caso de relaciones de n términos. En toda esta materia de la naturaleza de las funciones, clases y relaciones, el punto de vista de Bertrand Russell es parcialmente diferente del que aquí se indica. Las únicas funciones que acepta como lógicamente básicas son las funciones proposicionales. El trata las clases y relaciones en términos de funciones proposicionales por medio de definiciones contextuales (50.4, 60.1, [PM] *20, *21). Las funciones distintas a las funciones proposicionales son tratadas por Russell como si fueran relaciones de un tipo especial (65, [PM] *30).

06. Operadores y variables ligadas

06.1. Ciertas expresiones se llaman *operadores*. Un operador puede considerarse como el nombre de una entidad abstrasta llamada *operación*. Un operador también puede considerarse simplemente como una expresión que *opera sobre* otra expresión al ser colocada a su izquierda o a su derecha. Así la expresión '$\sim$' se usa con frecuencia como el operador que sirve como nombre de la operación negación. Esta última operación convierte a una proposición en su negada (o negativa). También podemos considerar '$\sim$' como un operador en el sentido de que si se coloca a la izquierda de una sentencia opera sobre la sentencia para dar la negativa de esta sentencia. (La proposición es el significado de una sentencia, de modo que en un caso un significado es operado para dar un significado, mientras en otro caso una sentencia es operada para dar una sentencia). Algunos operadores contienen una o más variables llamadas *variables ligadoras* del operador, pero otros operadores, tales como '$\sim$', carecen

de variables ligadoras, y estos operadores se llaman a veces *conectivas.* Un ejemplo de un operador que contiene una variable ligadora es el cuantificador existencial, '$(\exists x)$', suponiendo que el símbolo 'x' se emplea aquí como una variable. (En el resto de esta discusión acerca de los operadores aceptamos la convención de que los símbolos 'x' e 'y' se emplean como variables.) El operador negación y el cuantificador existencial son *operadores monádicos,* pues cada uno de ellos opera sobre una expresión simple. Algunos operadores son *diádicos, triádicos,* y así sucesivamente. Por ejemplo, el operador (o conectiva) que representa la disyunción es un operador diádico. Las expresiones sobre las que opera un operador se llaman *operandos* del operador. Así como un operador monádico se coloca a la izquierda o derecha de su operando, del mismo modo un operador n-ádico se coloca a la izquierda o derecha de la secuencia de sus n operandos. Para mayor claridad, una secuencia tal puede encerrarse entre paréntesis, y los operandos pueden separarse por medio de comas. Un operador diádico se coloca con frecuencia entre sus dos operandos, y cuando se hace esto algunos autores encierran la expresión resultante entre corchetes en vez de entre paréntesis, procedimiento que se seguirá usualmente en el presente Diccionario. Así escribiríamos '$[p \,\&\, q]$' en vez de '$(p \,\&\, q)$'. Cada operador está limitado para el uso con operandos de un tipo especificado, y si se usa con operandos de otro tipo la expresión total resultante no tiene sentido, o por lo menos no es una expresión bien-formada. En el caso de operadores que contengan variables ligadoras, los operandos permitidos son usualmente formas asociadas a funciones en el sentido de 05.3. Por ejemplo, la expresión '$5x$' es una forma asociada a la función f que tiene la propiedad de que $f(n) = 5n$ para todo entero positivo n (suponiendo que el rango de la variable 'x' se toma como la clase de los enteros positivos); y el operador siguiente,

$$\sum_{x=1}^{x=3}$$

puede permitirse que opere sobre '$5x$' para dar la expresión

$$\sum_{x=1}^{x=3} 5x$$

que denota al número 30. Si una forma asociada contiene solamente una variable, la forma debe operarse mediante un operador apropiado que contenga esa misma variable si la expresión resultante debe ser un nombre o una sentencia y no precisamente otra forma. Consideraciones

similares se aplican cuando la forma contiene más de una variable. Por ejemplo el operador

$$\prod_{x,y=1}^{x,y=2}$$

cuando se aplica a la forma '$[x + y]$' da un nombre del número 72, pero si el operador

$$\prod_{y=1}^{y=2}$$

se aplica a la misma forma, el resultado no es el nombre de un número sino una forma asociada a una función de un argumento. De hecho la función es la función dada por la ecuación siguiente:

$$f(x) = \prod_{y=1}^{y=2} [x + y].$$

06.2. Hay un operador importante llamado *operador-λ (operador lambda)* que cuando se aplica a una forma da el nombre de la función a la que está asociada la forma (cp. 40.2 ff., 44.1 ff.). Si 'x' se usa como la variable ligadora, el operador se escribe como 'λx'. Por ejemplo, si el operador-λ 'λx' se aplica a la forma '$5x$' para dar la expresión '$\lambda x(5x)$' (insertando paréntesis para eliminar ambigüedad), el resultado es un nombre de la función f que es tal que $f(n) = 5n$ para todo entero postivo n (suponiendo que el rango de 'x' es la clase de los enteros positivos). Así obtenemos,

$$(\lambda x(5x))\,(n) = 5n,$$

y en particular,

$$(\lambda x(5x))\,(2) = 10.$$

De modo similar la expresión '$\lambda x(e^x)$' sirve como nombre de la función exponencial, donde 'e^x' es una forma asociada de esta función y donde se supone que el rango de 'x' es la clase de los números reales. En el caso de funciones de dos variables podemos usar un operador-λ doble '$\lambda x \lambda y$'. Por ejemplo, la expresión,

$$\lambda x \lambda y\,[x + y]$$

es entonces un nombre de la función suma. Similarmente la expresión,

$$\lambda x \lambda y\,[x + y^2]$$

y la expresión

$$\lambda y \lambda x\,[x + y^2]$$

son nombres de dos funciones diferentes (que son mutuamente conversas). Podemos ilustrar la diferencia entre las dos últimas funciones diciendo que $(\lambda x \lambda y[x + y^2])$ (2, 3) es 11, mientras $(\lambda y \lambda x[x + y^2])$ (2, 3) es 7. También hay operadores-λ triples, cuádruples, y así sucesivamente, para tratar con funciones de tres o más variables. El operador '$\hat{x}$' es estrechamente análogo al operador-λ 'λx' y, en algunos casos, puede considerarse como un caso especial del último (40.7, 51.2). Podemos leer '$\hat{x}$' como "la clase de los objetos x que son tales que". Así, '$\hat{x}[x = 8]$' denotaría la clase de los números iguales a 8, y por tanto denotaría la clase unitaria que tiene al número 8 como único miembro. El operador '$\hat{x}$' sólo se aplica normalmente a formas proposicionales (esto es, formas asociadas a funciones proposicionales), mientras que el operador-λ 'λx' puede aplicarse de un modo más general.

06.3. Los cuantificadores son otro tipo importante de operadores ([Ch] 41). Si 'x' se usa como la variable ligadora, el cuantificador universal se escribe usualmente como '(x)' o como '$\forall x$'. Puede leerse como "para todo x" o como "para cada x". Por ejemplo, la proposición "Para todo x, $x = x$", puede expresarse,

$$(x)\,[x = x].$$

Si 'x' se usa como la variable ligadora, el cuantificador existencial se escribe normalmente como '$(\exists x)$' o como '$\exists x$'. Puede leerse como "para algún x" o como "existe un x tal que". Por ejemplo, la proposición "Para algún x, $x + 2 = 3$", puede expresarse,

$$(\exists x)\,[x + 2 = 3].$$

Para más detalles con respecto a los cuantificadores, véase el punto 21 siguiente.

06.4. Si 'x' se usa como una variable ligadora de un operador y si este operador se aplica a una expresión que contiene una ocurrencia de 'x', se dice que esta última ocurrencia de 'x' está *ligada* en (relativamente a) la expresión total resultante (incluido el operador). La ocurrencia de 'x' en el operador mismo también se dice que está ligada en la expresión total resultante (y esto es verdadero incluso si no hay ninguna ocurrencia de 'x' en la expresión a la que se aplica el operador). Así ambas ocurrencias de 'x' en '$(\exists x)\,[x = a]$' están ligadas en '$(\exists x)\,[x = a]$'. Además, si una ocurrencia de una variable está ligada en una parte de alguna expresión, entonces también se supone que esa ocurrencia de la variable está

ligada en la expresión completa. Por ejemplo, ya que ambas ocurrencias de 'x' en '$(\exists x)\,[x = a]$' están ligadas en la expresión '$(\exists x)\,[x = a]$', se sigue que ambas ocurrencias de 'x' en '$[p \supset (\exists x)\,[x = a]]$' están ligadas en la última expresión. Por otra parte, ninguna de estas ocurrencias de 'x' está ligada en la expresión menor '$[x = a]$'. En general, si una variable está ligada en alguna expresión, no se sigue la conclusión de que esté ligada en una parte menor de esa expresión.

06.5. Si una ocurrencia de una variable en una expresión no está ligada en esa expresión, entonces se dice que la ocurrencia de la variable es *libre* en esa expresión. Por ejemplo, ambas ocurrencias de 'x' en '$[x = x]$' son libres en '$[x = x]$', y similarmente la única ocurrencia de 'x' en '$[x = a]$' es libre en '$[x = a]$'. También la primera ocurrencia de 'x' en '$[[x = b] \supset (\exists x)\,[b = x]]$' es libre en '$[[x = b] \supset (\exists x)\,[b = x]]$', pero la segunda y tercera ocurrencias son ligadas en vez de libres en esta misma expresión. (Ver también 21.6, 44.4).

07. Asignación de significados

07.1. Para la asignación de significados a los términos de un lenguaje formalizado, debería tenerse en cuenta la distinción entre términos definidos e indefinidos. Una vez que han sido enunciadas las interpretaciones para todos los términos primitivos (indefinidos) y para todos los modos permisibles de combinación de términos, entonces resultarán también las interpretaciones para todos los términos definidos. Esto se debe a que los términos definidos pueden considerarse como abreviaciones de combinaciones de términos primitivos. Sin embargo, un sistema puramente sintáctico no proporciona reglas para asignar significados a los términos indefinidos (tales como constantes indefinidas, variables, o conectivas), aunque la naturaleza de los axiomas y reglas de inferencia de un sistema tal puede sugerir, implícitamente, distintas interpretaciones más o menos aceptables. Por otra parte, en el caso de un sistema semántico se proporcionan *reglas semánticas* que indican explícitamente la interpretación deseada de cada símbolo indefinido y de cada modo permisible de combinación de símbolos y por tanto indica indirectamente también la interpretación deseada de los términos definidos. A veces, sin embargo, se asignan significados solamente a algunos de los símbolos indefinidos, de modo que mediante las reglas semánticas únicamente se proporciona una interpretación parcial.

07.2. Si existe un isomorfismo de un tipo idóneo entre un sistema sin interpetar *X* y un sistema ya interpretado *Y*, la interpretación usada con respecto a *Y* puede usarse también con respecto a *X*. Un isomorfismo tal existe si hay una correspondencia uno-a-uno entre los símbolos del sistema *X* y los del sistema *Y* tal que (1) una serie de símbolos de *X* es bien formada en *X* si y sólo si la correspondiente serie de símbolos de *Y* es bien formada en *Y*; y (2) si una fórmula bien formada de *X* es un teorema de *X*, entonces la correspondiente fórmula bien formada de *Y* es un teorema de *Y*. Para ciertos tipos de sistemas debe establecerse una tercera condición: (3) Si una fórmula bien formada de *X* puede inferirse mediante las reglas de transformación de *X* a partir de cierto conjunto de fórmulas bien formadas de *X*, entonces la correspondiente fórmula bien formada de *Y* puede inferirse por las reglas de transformación de *Y* a partir del correspondiente conjunto de fórmulas bien formadas de *Y*.

08. Nombres y variables del metalenguaje

08.1. El lenguaje, tal como el castellano, empleado en discutir un sistema formal (esto es, en discutir un sistema que es un lenguaje formalizado) se llama *metalenguaje,* mientras que el sistema formal mismo se llama *lenguaje objeto.* Las expresiones que sirven como nombres, variables, etc., en el lenguaje objeto difieren con frecuencia de las expresiones correspondientes que sirven de un modo similar como nombres, variables, etc., en el metalenguaje. En particular, las variables del metalenguaje usadas por Church ([Ch] 60) para tratar de fórmulas bien formadas del lenguaje objeto, son letras mayúsculas negritas, y éstas son claramente diferentes de las letras itálicas minúsculas que usa como variables del lenguaje objeto. Otros ejemplos de variables del metalenguaje son las letras góticas mayúsculas usadas por [HA] y [HB], las letras latinas mayúsculas usadas por [K] (71), y las letras minúsculas griegas usadas por [Q] (33 ff.). (Ver también 91.)

08.2. En este Diccionario el nombre de una expresión se forma normalmente colocando esa expresión entre comillas simples. Por ejemplo, si deseamos hacer un enunciado acerca del símbolo que se escribe a continuación,

=

podemos usar la expresión siguiente como nombre del símbolo anterior:

'='.

Así podríamos hacer algunos enunciados tales como el siguiente:

El símbolo '=' se compone de dos trazos paralelos.

Adviértase que el enunciado anterior se refiere al símbolo,

=

y *no* a la expresión más larga,

'='

pero *usa* la última expresión como un *nombre* de la primera. Similarmente, la expresión escrita a continuación,

'*a*'

es el nombre de la primera letra itálica minúscula del alfabeto.

08.3. En el presente Diccionario también se necesita emplear variables del metalenguaje especiales para discutir distintos sistemas y lenguajes formalizados. Por tanto, con este fin, cada expresión que conste de una letra *itálica* junto con un par de comillas especiales encerrándola servirá como una variable del metalenguaje, excepto cuando hay indicación en contrario de acuerdo con 08.9 que se expone a continuación. Un ejemplo de una variable del metalenguaje es el siguiente:

⌜*a*⌝.

08.4. Las comillas especiales pueden colocarse no sólo alrededor de una sola letra itálica sino también alrededor de expresiones mayores que se construyen a partir de estas letras itálicas junto con otros símbolos distintos (como en 13.25) o palabras castellanas (como en 10.21). Cuando las comillas especiales se usan de este modo, la expresión total resultante, en este Diccionario, no es un nombre de la expresión encerrada, sino que es más bien una variable del metalenguaje referida a (que tiene como valores) las expresiones obtenibles a partir de la expresión encerrada reemplazando todas las letras itálicas por distintas expresiones de un lenguaje objeto (sistema interpretado) o de un sistema no interpretado. (Usualmente dejamos en la ambigüedad qué expresiones sean éstas, ya que podrían diferir de un sistema a otro; también suponemos que, en contextos donde no se indica explícitamente ningún sistema tal, podrían facilitarse algunos sistemas para proporcionar las expresiones requeridas.) Por ejemplo, considérese el enunciado:

Si ⌜*p*⌝ y ⌜*q*⌝ son sentencias, también lo es ⌜*p* · *q*⌝.

Este enunciado significa que si dos expresiones cualquiera del lenguaje objeto son sentencias (del lenguaje objeto), también lo es el resultado de colocar un punto entre ellas. Este uso de comillas especiales fue sugerido por un uso un tanto similar de Quine ([Q] 33 ff.) al que llama *cuasi-comillas*. En este uso las cuasi-comillas se escriben del modo siguiente:

$\ulcorner\ \urcorner$

Además las cuasi-comillas de Quine o esquinas nunca se colocan alrededor de una letra sola sino sólo alrededor de expresiones más largas.

08.5. Cuando en este Diccionario se usan letras itálicas no encerradas entre comillas simples o especiales, ni como partes de expresiones encerradas en tales comillas (ni en o como una palabra del discurso ordinario, naturalmente), entonces estas letras itálicas se usan como variables metalingüísticas que pueden tener como valores cosas distintas a las expresiones. Sus valores pueden ser proposiciones, relaciones, clases, etc. Por ejemplo, considérese el enunciado:

Si p y q son proposiciones, también lo es $p \cdot q$.

Este enunciado significa que la conjunción de dos proposiciones cualquiera es ella misma una proposición. No es un enunciado acerca de expresiones sino acerca de proposiciones. En cualquier contexto general de un tipo adecuado, debe presuponerse también un cierto tipo obvio de correspondencia entre las letras itálicas entre comillas especiales y las mismas letras itálicas sin comillas, como en el enunciado siguiente:

La expresión $\ulcorner x \in F \urcorner$ significa que x es un miembro de F.

Este enunciado aseveraría, en efecto, que si el símbolo 'ϵ' se coloca entre dos expresiones, entonces la expresión resultante significa que el objeto denotado por la expresión de la izquierda de 'ϵ' es un miembro del objeto denotado por la expresión de la derecha de 'ϵ'.

08.6. Las letras griegas minúsculas phi ('φ'), psi ('ψ') y chi ('χ') se reservarán para un uso especial en este Diccionario. Una expresión que conste de una cualquiera de estas letras griegas seguida por una letra itálica o una secuencia de letras itálicas, se usará muchas veces del mismo modo que una letra itálica simple, pero en un modo un poco más especial. Quizá esto se explica mejor dando algunos ejemplos. Considérese el enunciado siguiente:

Si ⌜ϕa⌝ y ⌜ψb⌝ son sentencias, si ⌜a⌝ y ⌜b⌝ son constantes, y si ⌜x⌝ es una variable, entonces ⌜$(x)\,[\phi x \cdot \psi x]$⌝ es una sentencia.

Este enunciado significaría que, dada cualquier sentencia ⌜p⌝ en la que ocurre una constante ⌜a⌝ una o más veces y una sentencia ⌜q⌝ en la que ocurre una constante ⌜b⌝ una o más veces, entonces, si ⌜x⌝ es una variable y ⌜r⌝ resulta a partir de ⌜p⌝ reemplazando ⌜a⌝ dondequiera que ocurra por ⌜x⌝, y si ⌜s⌝ resulta a partir de ⌜q⌝ reemplazando ⌜b⌝ dondequiera que ocurra por ⌜x⌝ entonces ⌜$(x)\,[r \cdot s]$⌝ es una sentencia. (Incluiremos también el caso en que ⌜p⌝ es una sentencia en la que ⌜a⌝ no ocurre en absoluto. En este caso ⌜p⌝ y ⌜r⌝ serían la misma sentencia. De modo similar incluimos el caso en que ⌜b⌝ no ocurre en ⌜q⌝. En este caso ⌜q⌝ y ⌜s⌝ serían la misma sentencia.) Considérese también el siguiente enunciado:

Si ⌜ϕabc⌝ es una sentencia, si ⌜a⌝, ⌜b⌝ y ⌜c⌝ son constantes y si ⌜x⌝, ⌜y⌝ y ⌜z⌝ son variables, entonces ⌜ϕxyz⌝ es una fórmula bien formada.

Este enunciado significaría que si ⌜p⌝ es una sentencia en la que las constantes ⌜a⌝, ⌜b⌝ y ⌜c⌝ ocurren cada una al menos una vez o posiblemente no ocurren en absoluto, entonces el resultado de reemplazar ⌜a⌝, ⌜b⌝ y ⌜c⌝ dondequiera que ocurran en ⌜p⌝ por las variables ⌜x⌝, ⌜y⌝ y ⌜z⌝ respectivamente es una fórmula bien formada.

08.7. En este Diccionario se usarán ciertas letras griegas distintas de phi ('ϕ'), psi ('ψ') y chi ('χ') del mismo modo que las letras itálicas. Cuando se hace esto deberá ponerse atención a este hecho. (Véase 52.1.)

08.8. A veces se usarán tres puntos o tres guiones para realizar la misma función que las letras griegas anteriores. Por ejemplo, la idea expresada por el enunciado expuesto antes (en 08.6) podría haberse expresado igualmente del modo siguiente:

Si ⌜$(\ldots a \ldots b \ldots c \ldots)$⌝ es una sentencia, si ⌜$a$⌝, ⌜$b$⌝ y ⌜$c$⌝ son constantes y ⌜$x$⌝, ⌜$y$⌝ y ⌜$z$⌝ son variables, entonces ⌜$(\ldots x \ldots y \ldots z \ldots)$⌝ es una fórmula bien formada.

El primer enunciado expuesto en 08.6 también podría expresarse del modo siguiente, usando puntos y guiones en vez de letras griegas:

Si⌜$(\ldots a \ldots)$⌝ y ⌜$(\text{---} b \text{---})$⌝ son sentencias, si ⌜$a$⌝ y ⌜$b$⌝ son constantes, y si ⌜$x$⌝ es una variable, entonces ⌜$(x)\,[(\ldots x \ldots) \cdot (\text{---} x \text{---})]$⌝ es una sentencia.

(Véase 21.1.)

08.9. Ocasionalmente los distintos símbolos que se han reservado para servir como metavariables, tales como las letras itálicas y ciertas letras

griegas minúsculas, deben usarse no como metavariables sino como instancias de la notación empleada por otros autores con otros propósitos determinados. En tales casos se hará referencia a este parágrafo, y se entenderá que los símbolos en cuestión no se están usando como metavariables, como, por ejemplo, en 25.1 y 61.5.

09. Uso de la notación algebraica

09.1. Históricamente, la lógica matemática (lógica simbólica) tiene su origen en dos desarrollos bastante separados. El primero de estos desarrollos es la antigua álgebra de lógica, que empezó con el trabajo de Boole (**191**, **193**, XVI 224, XXIV 203) y puede considerarse culminado en los escritos de Schröder (**427**, **4210**, **4212**), Couturat (**10016**), y Huntington (**1221**). El otro desarrollo comenzó con el trabajo de Frege (**491**, **4910**) que fue continuado por Russell, Hilbert, Carnap y muchos otros lógicos recientes. Este segundo desarrollo se distingue por su uso del método lógico (cp. 01.11-01.13). El punto de vista de este segundo desarrollo es el que se ha adoptado principalmente en este Diccionario. El método lógico especifica explícitamente qué enunciados se consideran como significativos y qué inferencias son admisibles a partir de estos enunciados. Por tanto no deja estas dos consideraciones básicas a una intuición natural un tanto incierta, y es particularmente útil cuando se está especificando un sistema con el fin expreso de proponer o establecer fundamentaciones para alguna disciplina, digamos, las matemáticas.

09.2. Los sucesores recientes del álgebra de la lógica son de mayor significación dentro de su propio contexto (matemático) y conservan aplicaciones importantes incluso para la lógica tal como se trata en el método lógico. El álgebra booleana, por ejemplo, que tiene el cálculo de clases como una de sus interpretaciones, ha sido durante mucho tiempo una rama importante del álgebra abstracta. Recientemente se han propuesto tipos más amplios de "lógica algebraica" —en particular, las álgebras cilíndricas de Tarski (XXII 215 (1, 2)) y las álgebras poliádicas de Halmos (XXVII 468-470).

09.3. Las tres ramas del álgebra de la lógica desarrollada en el siglo diecinueve fueron un álgebra de proposiciones, un álgebra de clases, y un álgebra de relaciones (binarias). Cada una de estas tres ramas tiene su contrapartida en la lógica reciente como un determinado lenguaje formalizado. Estas contrapartidas de las álgebras de proposiciones, de clases, y de relaciones se tratarán en los capítulos 1, 5 y 6 respectivamente. Tam-

bién hay un sentido en el que la lógica funcional de primer orden (o de "predicados") (tratada en el capítulo 2) puede considerarse como un descendiente reciente del álgebra de relaciones. (Con respecto a las relaciones entre las dos, véase Tarski VII 38.)

09.4. Tanto el cálculo de clases como el cálculo de relaciones pueden considerarse incluidos en la teoría de conjuntos, y sus notaciones se usan generalmente en teoría de conjuntos. El operador de abstracción (cp. 06.2), tratado como una notación primitiva en el cálculo de la conversión λ y obtenible en lógica combinatoria (capítulo 4) mediante definición (contextual), proporciona un medio para definir algunos de los conceptos de teoría de conjuntos en términos de lógica funcional.

09.5. La teoría de conjuntos como disciplina autónoma no se tratará en este Diccionario. Pero debe advertirse que la teoría de conjuntos (tratada por el método lógico) y la teoría de tipos (como se representa por el cálculo funcional de orden superior, capítulo 3) pueden considerarse como dos métodos igualmente plausibles para proporcionar una fundamentación adecuada de la matemática. Para un tratamiento de la teoría de tipos desde un punto de vista teórico conjuntista, véase Quine II 51. Y para exposiciones generales de la teoría de conjuntos véanse Bernays III 49, IX 74, XXII 376; Bernays y Fraenkel XXIV 224; Fraenkel XI 29; *Foundations of Set Theory* de Abraham A. Fraenkel y Yehoshua Bar-Hillel (1958, North-Holland Publ. Co., Amsterdam), y Gödel VI 112.

09.6. En este Diccionario, pues, empezamos con lógica proposicional (capítulo 1), seguida de una lógica funcional de distintos órdenes (capítulos 2 y 3). El capítulo 4 trata de lógica combinatoria y del cálculo de conversiones λ. El capítulo 5 concierne al cálculo de clases, y el capítulo 6 al cálculo de relaciones. Los capítulos 7 y 8 discuten la axiomatización de la aritmética, y el capítulo 9 trata de metamatemática.

CAPITULO 1

CALCULO PROPOSICIONAL

10. Cálculo proposicional bivalente; una explicación informal

10.1. INTRODUCCIÓN. El cálculo proposicional bivalente proporciona un método para especificar algunas proposiciones como lógicamente verdaderas y otras como lógicamente falsas. Puede suponerse que hay modos definidos de componer proposiciones a partir de otras proposiciones. Desde este punto de vista el cálculo proposicional bivalente puede considerarse como relativo a ciertos modos seleccionados de componer proposiciones a partir de otras proposiciones (10.21). La verdad o falsedad de una proposición así compuesta puede considerarse que depende de la verdad o falsedad de las proposiciones que la componen. Además, se supone que cada proposición es o verdadera o falsa (pero cp. 13 siguiente). Hay distintas variedades de cálculo proposicional bivalente, pero todos son equivalentes entre sí en un sentido fundamental. Algunos de estos usan axiomas y reglas de inferencia. Otros subrayan la notación que es conveniente para expresar los denominados "valores veritativos" de las proposiciones y para clarificar la dependencia de los valores veritativos de una proposición compuesta de los valores veritativos de las proposiciones que la componen. La explicación que se expone a continuación es de este último tipo. En toda esta discusión es importante tener en cuenta la distinción entre la sentencia, que es una representación lingüística o simbólica de la proposición, y la proposición misma.

10.2. CONECTIVAS Y FUNCIONES VERITATIVAS

10.21. Las proposiciones pueden considerarse como lo que expresan las sentencias (declarativas) (cp. 04). Como ya se ha advertido, puede consi-

derarse que algunas proposiciones se componen a partir de otras proposiciones. Las sentencias que expresan proposiciones compuestas pueden formarse a partir de sentencias que expresan las proposiciones que la componen por medio de conectivas adecuadas, tales como, por ejemplo, 'o', 'y' y 'si... entonces...'. Así si 'p' y 'q' son sentencias que expresan proposiciones p y q, entonces 'p o q', 'p y q' y 'si p entonces q' son las sentencias compuestas correspondientes que expresan las proposiciones a las que se refieren —diremos "compuestas de"— las proposiciones p y q en el modo que se expresa por medio de las conectivas. En lógica simbólica es habitual usar símbolos especiales para desempeñar el papel de estas conectivas (12.2), y estos símbolos son llamados a su vez conectivas (06.1). Las proposiciones no tienen valores del mismo modo que los tienen las funciones, pero con todo decimos que toda proposición verdadera tiene el valor veritativo verdad y que toda proposición falsa tiene el valor veritativo falsedad. En el cálculo proposicional bivalente se supone que toda proposición tratada es o verdadera o falsa. Estos valores veritativos pueden considerarse como atributos de las proposiciones o bien como proposiciones de un tipo especial que son equivalentes a las proposiciones que "las tienen" (04.4), o con Frege, como las denotaciones de las sentencias (04.3). En algún caso, el tipo de componer proposiciones que aquí se considera es tal que el valor veritativo de una proposición compuesta puede determinarse a partir del conocimiento de los valores veritativos de las proposiciones que la componen.

10.22. Este último hecho es el punto de partida de nuestra explicación de la interpretación de las conectivas usadas en lógica proposicional. Estas conectivas proposicionales —o quizás mejor, conectivas de sentencias— se toman a veces como carentes de significado aisladamente (05.1). Pueden constar de palabras ordinarias o de símbolos especiales. Si constan de palabras ordinarias, las palabras pueden ser conjunciones (tales como '*y*' y '*o*'), o frases conjuntivas (tales como 'si... entonces...'), pero a veces pueden ser verbos ('implica'), frases verbales ('es equivalente a'), o adverbios ('no'). Si usando una conectiva tal como 'si... entonces...', construimos una forma tal como 'si p entonces q', donde 'p' y 'q' son variables, entonces la función de la cual esta forma es una forma asociada (05.4) se dice que es la *función asociada* de la conectiva. Una conectiva de sentencias se entiende entendiendo su función asociada. En algunos contextos puede ser apropiado considerar la conectiva como el nombre de una función asociada (cp. 32.26); pero cuando se hace esto se considera la conectiva como un símbolo funcional.

10.23. La función asociada de una conectiva de sentencias (10.22) es una función proposicional que normalmente se llama *función veritativa* y se describe por medio de una *tabla veritativa* (10.47). Tales tablas se expondrán más adelante (11) para cada una de las funciones veritativas usadas comunmente en lógica proposicional. Estas funciones proposicionales se llaman funciones veritativas porque la verdad o falsedad de los argumentos de una función tal determina la verdad o falsedad del valor de la función.

10.24. Las tablas veritativas no sólo son suficientes para definir las funciones veritativas asociadas de las conectivas del cálculo proposicional bivalente, sino que también nos proporcionan un modo de determinar la clase de los teoremas de ese cálculo. Así como una proposición tiene un valor veritativo, del mismo modo en un sentido paralelo pero un poco diferente de "tiene", una sentencia que expresa una proposición tiene un valor veritativo, de hecho el mismo valor veritativo que tiene la proposición que expresa la sentencia. Así el valor veritativo de una sentencia compuesta puede determinarse de un modo paralelo a la determinación del valor veritativo de una proposición compuesta. La condición necesaria y suficiente para que una sentencia sea un teorema del cálculo proposicional (sentencial) bivalente es que sea una sentencia compuesta que tenga el valor veritativo verdad para toda asignación posible de valores veritativos a las sentencias simples (no compuestas) de las cuales se compone. Una sentencia tal se llama con frecuencia *tautología de tabla veritativa.* (Por ejemplo, véase 12.37.) En algún caso particular tales sentencias constituirían una subclase específica de las fórmulas bien formadas de alguna formulación del cálculo proposicional (sentencial) bivalente. Diciendo que una proposición es un teorema de un cálculo tal, significaríamos ordinariamente que la proposición se expresa mediante una de las sentencias que es un teorema del cálculo. Tales proposiciones pueden denominarse tautologías de tablas veritativas.

10.3. Funciones veritativas de un argumento

10.31. Consideremos en primer lugar las funciones veritativas de un argumento y las conectivas con las que se asocian cada una de estas funciones. Hay cuatro funciones veritativas de este tipo, ya que el argumento de la función puede ser verdadero o falso y el valor de la función puede ser verdadero o falso. (En adelante usaremos '*p*', '*q*' y '*r*'

para referirnos a las proposiciones.) De estas cuatro funciones las dos más importantes son:

10.32. *Afirmación.* La afirmación de p establece que p es verdadero. Es decir, la afirmación de p es verdadera si p es verdadero, falsa si p es falso.

10.33. *Negación.* La negación (negativa) de p establece que p es falso. Esto es, la negación de p es falsa si p es verdadero, verdadera si p es falso.

10.4. Funciones veritativas de dos argumentos

10.41. Los argumentos de una función veritativa de dos argumentos pueden ser cuatro (es decir 2^2) combinaciones de valores veritativos:

1) ambos argumentos verdaderos,
2) el primer argumento verdadero, el segundo argumento falso,
3) el primer argumento falso, el segundo argumento verdadero,
4) ambos argumentos falsos.

Para cada combinación de los valores veritativos de los argumentos el valor de la función puede ser o verdadero o falso; por lo tanto podemos tener $2^{2^2} = 2^4 = 16$ funciones veritativas diferentes de dos argumentos. De estas dieciséis funciones las más importantes son:

10.42. *Conjunción.* La conjunción de p y q establece que p y q son verdaderos; es decir, la conjunción es veredadera si p y q son ambos verdaderos y en cualquier otro caso es falsa.

10.43. *Disyunción (no exclusiva).* La disyunción (no exclusiva) de p y q establece que p o q es verdadero; es decir, la disyunción es falsa si p y q son ambos falsos y es verdadera si al menos uno de ellos es verdadero.

10.44. *Implicación material.* La implicación material de q por p establece que p implica materialmente q. Decir que p implica materialmente q equivale a decir que p es falso o q es verdadero. En otras palabras, equivale a decir que es falso que p es verdadero y a la vez q es falso. Por tanto la condición necesaria y suficiente para la verdad de la proposición que enuncia que p implica materialmente q es que al menos se dé una de las dos condiciones siguientes: (1) p es falso: (2) q es verdadero. La implicación material es muy útil en el análisis lógico. Con frecuencia una

sentencia '*si p entonces q*', puede considerarse como sinónima de '*p* implica materialmente *q*', pero hay casos de uso de 'si... entonces...' en el lenguaje ordinario que no pueden ser analizados adecuadamente en términos de implicación material. En consecuencia los lógicos han intentado definir otros tipos tales como la implicación estricta *(strict implication)* de Lewis (14.1), implicación causal *(causal implication)* de Burk (XVI 277), implicación estricta *(estrenge Implikation)* de Ackermann (XXII 327), y la vinculación *(entailment)* de Anderson y Belnap (Alan R. Anderson y Nuel D. Belnap Jr., "Tautological Entailments", *Philosophical Studies,* Vol. 13 (1962) pp. 9-24). El hecho de que una proposición falsa implica materialmente toda proposición, y el hecho de que una proposición verdadera es implicada materialmente por toda proposición, está relacionado con esta necesidad de algunos otros tipos de implicación; mientras que en el caso de otros tipos de implicación no desearíamos establecer que una proposición falsa implica cualquier proposición, ni que una proposición verdadera es implicada por cualquier proposición. Por otra parte, quizá puede aceptarse alguna situación de este tipo para la frase 'si... entonces...', porque no parece inadmisible decir, "si una proposición falsa es verdadera, entonces *cualquier* proposición es verdadera", y "si cualquier proposición es verdadera entonces una proposición verdadera lo es".

10.45. *Implicación material inversa.* La implicación material inversa de *q* por *p* establece que *p* es implicado materialmente por *q*. Esto es, la implicación material inversa es falsa si *q* es verdadero y *p* falso y de otro modo es verdadera. Observaciones similares a las relativas a la implicación material (10.44) son también relevantes para la implicación material inversa.

10.46. *Equivalencia material.* La equivalencia material de *p* y *q* establece que *p* y *q* tienen el mismo valor veritativo; por tanto la equivalencia material es verdadera si *p* y *q* son verdaderos a la vez o falsos a la vez y es falsa de otro modo. Con frecuencia una sentencia '*p* si y sólo si *q*' puede considerarse como sinónimo de '*p* es materialmente equivalente a *q*'. Observaciones similares a las relativas a la implicación material (10.44) son también relevantes para la equivalencia material.

10.47. Las funciones veritativas también pueden definirse de tal modo que tomen valores veritativos como sus argumentos y valores, en lugar de tomar proposiciones como sus argumentos y valores. (Naturalmente, si los valores veritativos se consideran como un tipo especial de propo-

sición, como en 04.5, entonces las funciones veritativas siempre tomarían proposiciones como argumentos y valores, pero sólo proposiciones de este tipo especial.) Se puede considerar que las tablas veritativas definen funciones veritativas de uno de estos dos tipos. En el caso de funciones veritativas que sólo usan valores veritativos como sus argumentos y valores, la tabla veritativa define *explícitamente* la función especificando qué valor veritativo *es* el valor de la función correspondiente a cada especificación, así como qué valores veritativos *son* argumentos de la función. En el caso de funciones veritativas que usan proposiciones como sus argumentos y valores, la tabla veritativa define implícitamente la función especificando qué valor veritativo *tiene* el valor de la función correspondiente a cada especificación, así como qué valores veritativos *tienen* los argumentos de la función.

11. Notación para las tablas veritativas bivalentes

11.1. Las tablas veritativas que definen las funciones descritas en 10.3 y 10.4 se representarán simbólicamente en nuestra explicación del modo siguiente:

11.2. Escribimos 'v' para verdad y 'f' para falsedad. Convenimos que 'v' precede a 'f' en el orden lexicográfico.

11.3. La tabla veritativa para la negación (10.33) será:

(primera forma)

p	negación de *p*
v	f
f	v

(segunda forma)

	p	v	f
Negación de	*p*	f	v

y de modo similar para otras funciones veritativas de un argumento.

11.4. La tabla veritativa para la conjunción (10.42) será:

(primera forma)

p q	conjunción de p con q
v v	v
v f	f
f v	f
f f	f

(segunda forma)

p	v	v	f	f
q	v	f	v	f
conjunción de p con q	v	f	f	f

y de modo similar para otras funciones veritativas de dos argumentos.

11.5. Daremos las tablas veritativas para las funciones veritativas en la notación de la "segunda forma" presentada antes, pero abreviada por escribir sólo la última línea de la tabla, y añadir paréntesis, así:

Afirmación de p	(v f)	(10.32)
Negación de p	(f. v)	(10.33)
Conjunción de p con q	(vf ff)	(10.42)
Disyunción de p con q	(vv vf)	(10.43)
Implicación material de q por p	(vf vv)	(10.44)
Implicación material inversa de q por p	(vv fv)	(10.45)
Equivalencia material de p con q	(vf fv)	(10.46)

12. Símbolos del cálculo proposicional

12.1. VARIABLES PROPOSICIONALES. Los símbolos más frecuentemente usados como variables proposicionales son las letras '*p*', '*q*', '*r*' y '*s*', y estas mismas letras con uno o más símbolos (') o con índices. Las letras mayúsculas se usan en [HA] (3, 65), [HB] (i 45), [K] (72, 109); Heyting (3852), y Reichenbach (XIV· 50, p. 23) usan las letras minúsculas '*a*', '*b*', '*c*', ...

12.2. Tabla de símbolos

Equivalente castellano	PM	HA HB	Ł	HS	Otras notaciones
no p	$\sim p$	$\bar{p}$	Np	$\bar{p}$	p', $-p$, $\neg p$
p y q	$p.q$ pq	$p \& q$	Kpq	$p \wedge q$	
p o q	$p \vee q$	$p \vee q$ pq	Apq	$p \vee q$	$p+q$
si p entonces q	$p \supset q$	$p \rightarrow q$	Cpq	$p \rightarrow q$	
p si q	$p \subset q$		Bpq	$p \leftarrow q$	
p si y sólo si q	$p \equiv q$	$p \sim q$	Epq	$p \leftrightarrow q$	

Debajo de PM damos la notación de *Principia Mathematica* ([PM]), que también es usada por [Ch], [R] y otros numerosos autores (a veces con ligeras variaciones, cp. [K]). Esta es la notación usada generalmente para los fines explicativos de este Diccionario. Debajo de HA damos la notación de [HA] y [HB], que también es usada por Gentzen. La notación de Łukasiewicz se da debajo de Ł; esta notación hace innecesario el uso de paréntesis, puntos, etc. (cp. 16). Esta notación es usada con frecuencia por los lógicos polacos. La notación que está debajo de HS es usada por Hermes-Scholz, y en numerosas publicaciones por miembros de la escuela de Münster. Notaciones relacionadas con las dadas debajo de HA y HS son usadas, por ejemplo, por Tarski, Beth y también por Kleene, pero el último utiliza el signo de negación de Heyting (cp. 15.3).

12.3. Comentarios a la tabla (12.2)

12.31. A lo largo de toda la tabla hemos usado las letras itálicas minúsculas 'p' y 'q' como variables proposicionales. Las letras reales que se usan como variables proposicionales difieren de un autor a otro.

12.32. Hay una variedad tipográfica considerable para los símbolos '.', '&', '$\vee$', '$\wedge$' y '$\supset$'. Por ejemplo, el punto puede ser grueso o fino, redondo o cuadrado, y puede aparecer sobre la línea o bajo ella. El ángulo o cuña puede ser de trazo fino o grueso, pequeño o grande, mayúscula

o minúscula. Donde se usan letras mayúsculas latinas en 12.2 o 12.5, con frecuencia los mismos autores usan letras mayúsculas itálicas.

12.33. El símbolo para la conjunción se omite totalmente en muchas notaciones standard, y se usa la mera yuxtaposición de dos variables proposicionales en lugar de una expresión consistente en dos variables de este tipo unidas por un símbolo de conjunción. Generalmente no se seguirá esta convención en este Diccionario. En [HA] (122) se omite de este modo el símbolo de disyunción en vez del símbolo de conjunción. En Feys X 100 y Levin XV 69, se omite de este mismo modo el símbolo de 'ni... ni...'.

12.34. '$\sim$' se usa para la negativa o negación en [Ch] (37), [Q] (13), y [R] (12), pero en [HA] (4), [HB] (i 47), y [K] (9) se usa para la equivalencia material. En este último caso, a veces se prefiere un símbolo mayor '$\sim$'.

12.35. '$\hookrightarrow$' se usa generalmente para expresar implicación material u otro tipo de implicación, tal como la vinculación (entailment) de Anderson y Belnap (10.44). Church ([C] 77) usa la flecha para expresar el hecho de que una expresión es una abreviación de otra. Véase también 96.4.

12.36. '$\equiv$' expresa con frecuencia equivalencia material u otro tipo de equivalencia. En Curry XVIII 266 expresa equivalencia definicional.

12.37. La tabla siguiente es un ejemplo de tabla veritativa usando las conectivas '$\sim$' y '$\supset$'.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \supset q$	$\sim q \supset \sim p$	$[p \supset q] \supset [\sim q \supset \sim p]$
v	v	f	f	v	v	v
v	f	f	v	f	f	v
f	v	v	f	v	v	v
f	f	v	v	v	v	v

La sentencia '$[p \supset q] \supset [\sim q \supset \sim p]$' tiene el valor veritativo v para todas las asignaciones de valores veritativos de las sentencias 'p' y 'q' y por tanto es una tautología de tabla veritativa (10.24).

12.4. INTERDEFINIBILIDAD. Como consecuencia del modo en que ciertas funciones veritativas han sido definidas mediante tablas veritativas, se establecen ciertas equivalencias. Por ejemplo, $p \supset q$ es equivalente a $\sim p \vee q$ y a $\sim [p \cdot \sim q]$. Y $p \cdot q$ es equivalente a $\sim [\sim p \vee \sim q]$. Estas equivalencias pueden usarse para definir la implicación en términos de negación y disyunción, o en términos de negación y conjunción, y para definir la conjunción en términos de negación y disyunción. De modo similar la disyunción puede definirse en términos de negación y conjunción.

12.5. CONECTIVAS CORRESPONDIENTES A LAS NEGACIONES DE CIERTAS FORMAS PROPOSICIONALES

Equivalente castellano	Church ([Ch] 37)	Otras notaciones Prior XXII 224 (7, 8, 10, 11, 12) [Q] 45	Notación equivalente de este Diccionario
no a la vez p y q	$p \mid q$	Dpq	$\sim [p.q]$
ni p ni q	$p \bar{\vee} q$	Xpq $p \downarrow q$	$\sim [p \vee q]$
p pero no q	$p \not\supset q$	Lpq	$\sim [p \supset q]$
q pero no p	$p \not\subset q$	Mpq	$\sim [p \subset q]$
o bien p o bien q	$p \not\equiv q$	Jpq	$\sim [p \equiv q]$

12.6. CONECTIVAS MÁS QUE BINARIAS

12.61. Las conectivas ternarias son poco usadas. Sin embargo, Church usa en efecto una conectiva ternaria cuando escribe '$[p, q, r]$' para expresar una proposición equivalente a la expresada por '$[p \supset p] \cdot [\sim q \supset r]$' ([Ch] 129).

12.62. La conjunción de p_1 con p_2 con p_3 con ... con p_n se expresa a veces así:

$$\prod_{i=1}^{i=n} p_i.$$

12.63. La disyunción de p_1 con p_2 con p_3 con ... con p_n se expresa a veces así:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i.$$

12.7. CONSTANTES PROPOSICIONALES. A veces se usan dos constantes proposicionales que pueden traducirse como *verdad* y *falsedad*. Puede considerarse que la constante traducida como *verdad* expresa una proposición verdadera arbitraria, y puede considerarse que la constante traducida como falsedad expresa una proposición falsa arbitraria. Por otra parte, si los valores veritativos verdad y falsedad son considerados ellos mismos como proposiciones especiales (como se sugirió en 04.5), entonces puede considerarse que estas dos constantes expresan estos dos valores veritativos. En cualquier caso, toda proposición verdadera es materialmente equivalente a la proposición expresada por la constante empleada para verdad, y toda proposición falsa es materialmente equivalente a la proposición expresada por la constante empleada para falsedad. Church usa las letras minúsculas '*t*' y '*f*' como estas constantes ([Ch] 73). Otros autores escriben '$\bar{\wedge}$' para la constante de falsedad y '$\vee$' para la constante de verdad (Gentzen 4422, Johansson II 47). Otras notaciones para la constante de falsedad son '*F*' (Curry XVIII 266(2)) y '0' (Wajsberg 4372).

13. Cálculo proposicional polivalente

13.01. En el cálculo proposicional clásico se satisfacen tres condiciones: (1) todas las funciones son funciones veritativas, (2) hay exactamente dos valores veritativos, y (3) hay exactamente un valor veritativo "designado", especialmente verdad. Consideraremos cálculos no clásicos aquellos que no satisfagan una o más de estas condiciones.

13.02. Los cálculos *polivalentes* satisfacen la condición (1), pero en estos cálculos hay más de dos valores veritativos. Asimismo puede haber más de un valor veritativo designado, y si esto es así, entonces los distintos valores veritativos designados corresponden a diferentes tipos de verdad. Las lógicas modales (14) no satisfacen (1) generalmente.

13.1. VALORES VERITATIVOS

13.11. Se han estudiado sistemas con un número finito o infinito denumerable de valores veritativos. Los valores veritativos de cada sistema de este tipo están completamente ordenados; es decir, para cuales-

quiera dos valores veritativos, uno es "mayor" que el otro. Usualmente estos valores veritativos se denotan mediante números, pero es pequeña la uniformidad entre las notaciones usadas en los distintos cálculos polivalentes.

13.12. Para un cálculo con un número finito m de valores veritativos, la notación más frecuente es la siguiente: 1 es el valor veritativo mayor, m el menor. Los valores veritativos intermedios corresponden a los números naturales entre 1 y m. A menos que se especifique de otro modo, usamos aquí esta notación. Las reglas dadas pueden adaptarse fácilmente a otras notaciones. (Estrictamente hablando, los símbolos que denotan los números naturales se usan, por conveniencia, para denotar valores veritativos. A veces podemos hablar como si algunos números *fueran* realmente valores veritativos, pero esto no es literalmente verdadero. Adviértase también que el orden de los números es opuesto al orden de los valores veritativos.)

13.13. Como notación alternativa, para un cálculo con un número finito m de valores veritativos, el valor veritativo mayor puede ser $m - 1$, el menor 0, siendo denotados los valores veritativos intermedios por los números naturales entre $m - 1$ y 0. Para un cálculo con un número finito o infinito denumerable de valores veritativos, el valor veritativo mayor también podría expresarse por '1', el menor por '0', siendo denotados los valores intermedios por los números racionales entre 1 y 0 (por todos estos números si el número de valores veritativos es infinito denumerable).

13.14. A veces los valores veritativos pueden interpretarse de un modo general como grados de verdad: el valor veritativo mayor como "completamente verdadero", el menor como "completamente falso", y los valores veritativos intermedios como grados de verdad "entre" estos dos extremos. Post (2801) y Zawirski (3556) han dado interpretaciones más precisas.

13.15. El mayor valor veritativo 1 (13.12) es siempre un valor veritativo designado, el menor valor veritativo m, es siempre no designado. Hay un valor veritativo s tal que los valores veritativos mayores o iguales que s son designados, y los valores veritativos menores que s son no designados. Más frecuentemente tan solo hay un valor veritativo designado, de modo que $s = 1$.

13.16. El número de funciones veritativas aumentará muy rápidamente con un m que se incrementa. Con tres valores veritativos ($m = 3$) ya hay $3^3 = 27$ funciones veritativas de un argumento y $3^{3^3} = 3^9 = 19683$ funciones veritativas de dos argumentos.

13.17. Las consideraciones precedentes acerca de las tablas veritativas (10, 11) también son válidas para los sistemas polivalentes. El método de tablas veritativas proporciona, como en la lógica bivalente, un método de decisión (10.24). Una forma proposicional es válida si tiene un valor veritativo designado para cada una de las combinaciones posibles de valores veritativos de sus argumentos. También podemos transferir a la lógica polivalente la terminología de sentido y denotación. Así podría decirse que una sentencia de lógica polivalente denota un valor veritativo (cp. 04.2).

13.18. En las explicaciones siguientes tomamos como símbolo de una función veritativa dada una forma abreviada de la tabla veritativa correspondiente a esa función (cp. 11.5), suponiendo que las combinaciones de valores veritativos se colocan en un orden lexicográfico tal que un valor veritativo mayor precede a otro menor, y escribiendo después los valores de la función en ese orden. En esta notación, si la tabla veritativa de $F(p)$ es

p	1	2	3
$F(p)$	3	2	1

entonces la notación para $F(p)$ será '(3 2 1)'. Si la tabla veritativa de $F'(p, q)$ es

p	1	1	1	2	2	2	3	3	3
q	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$F'(p, q)$	1	1	1	1	2	2	1	2	3

entonces la notación para $F'(p, q)$ será '(111 122 123)'.

13.19. Las conectivas pueden asociarse con cualquier función veritativa. Sin embargo, de hecho, las conectivas sólo se han asociado con funciones análogas a las del cálculo proposicional clásico y pocas funciones más.

13.2. Conectivas normales de Łukasiewicz

13.21. Para cualquier sistema polivalente con sólo un valor designado, Łukasiewicz (1864) ha asociado conectivas con funciones veritativas tales que la mayoría de los teoremas de lógica bivalente son válidos en cual-

quier sistema de este tipo. Ya que los símbolos en estos sistemas son los mismos que para la lógica bivalente, hacemos referencia nuevamente a la tabla de símbolos (12.2) para sus distintas formas. Estas conectivas, descritas a continuación en 13.22-13.27, se llamarán conectivas normales a causa de su similitud con las conectivas de lógica bivalente. Mencionamos en primer lugar la función de identidad, expresada por la ausencia de cualquier conectiva.

13.22. Puede considerarse que la frase 'es verdadero' expresa la función de identidad, ya que asertar p es equivalente a asertar que p es verdadero. El valor veritativo de esta función es siempre igual al valor veritativo del argumento de la función. Para $m = 3$ (lógica trivalente) la tabla veritativa de la función de identidad es

$$(1\ 2\ 3).$$

13.23. Si p tiene como valor veritativo a n, el valor de la negación de p será $(m + 1) - n$, donde m es el número total de valores veritativos. Por tanto, para $m = 3$, la función de negación tiene la tabla veritativa

$$(3\ 2\ 1).$$

13.24. Sean n y n' los valores veritativos de p y q respectivamente en esta sección y en las secciones 13.25-13.27 siguientes. Entonces la *conjunción* de p y q, escrita '$p \cdot q$', tiene el menor de los dos valores veritativos n y n'. Para $m = 3$, la tabla veritativa de la conjunción es

$$(123\ 223\ 333).$$

Puede verse que la conjunción de p y q nunca es más verdadera que cualquiera de las proposiciones p y q, y también que $p \cdot q$ tiene un valor veritativo designado si y sólo si tanto p como q tienen un valor veritativo designado.

13.25. La *disyunción* (no exclusiva) de p y q, que se escribe '$p \vee q$', tiene el mayor de los dos valores veritativos n y n' (cp. 13.24). Para $m = 3$, la tabla veritativa de la disyunción es

$$(111\ 122\ 123).$$

Puede verse que la disyunción de p y q nunca es menos verdadera que cualquiera de las proposiciones p y q, y también que $p \vee q$ tiene un valor designado si y sólo si al menos una de las proposiciones, p y q tiene un valor designado.

13.26. Para la *implicación* de q por p, escrita '$p \supset q$',

(1) Si $n > n'$ (cp. 13.24), entonces $p \supset q$ tiene el valor designado 1. Este es también el caso para $p \supset q$ en lógica bivalente (cp. 10.44).

(2) Si $n < n'$ entonces $p \supset q$ tiene el valor $1 + n' - n$. Este es también el caso en lógica bivalente, pues si $n = 1$ y $n' = 2$, entonces el valor veritativo de $p \supset q$ es 2. (Aquí 2 corresponde a falsedad y 1 a verdad.)

Para $m = 3$, la tabla veritativa de la implicación es

(123 112 111).

13.27. Para la *equivalencia* de p con q, escrita '$p \equiv q$',

(1) Si $n = n'$ (cp. 13.24), entonces $p \equiv q$ tiene el valor 1.

(2) Si $n \neq n'$, entonces $p \equiv q$ tiene el valor $1 + |n - n'|$.

Estos son también los casos en lógica bivalente. Para $m = 3$, la tabla veritativa de la equivalencia es

(123 212 321).

Puede ponerse de relieve que $p \equiv q$ no es equivalente a $[p \cdot q] \vee [\sim p \cdot \cdot \sim q]$ en lógica m-valente donde m es mayor que 2. En lógica trivalente la función que tiene '$[p \cdot q] \vee [\sim p \cdot \sim q]$' como una forma asociada tiene como tabla veritativa

(123 222 321).

13.28. A pesar de la analogía entre las funciones bivalentes y polivalentes, algunas definiciones válidas en lógica bivalente (12.4) no pueden transferirse a las conectivas normales (13.21) de lógica polivalente. Por ejemplo, $p \supset q$, $\sim p \vee q$, y $\sim [p \cdot \sim q]$ no son totalmente equivalentes.

13.29. En un sentido la lógica bivalente está ya contenida en la lógica m-valente donde m es mayor que 2, al menos si la lógica m-valente es "completa" en el sentido de Slupecki, III 165, pues podemos definir una función en lógica m-valente que exprese verdad y otra que exprese falsedad. Si f_1 es la función que expresa verdad, entonces f_1 se define de tal modo que $f_1(p)$ tiene un valor designado si y sólo si p mismo tiene un valor designado. Si $f_2(p)$ es la función que expresa falsedad, entonces f_2 se define de tal modo que $f_2(p)$ tiene un valor designado si y sólo si p no tiene un valor designado; ya que en lógica m-valente toda proposición p tiene un valor designado o no designado, es "verdadera" o "falsa" en el sentido de que bien $f_1(p)$ o bien $f_2(p)$ tiene un valor designado, pero

no ambos. Considerado de este modo, se ve que los valores designados representan diferentes subdivisiones de la noción de verdad de la lógica bivalente, mientras que los valores no designados representan diferentes subdivisiones de la noción de falsedad de la lógica bivalente.

13.3. Las funciones J_k

13.31. Sean las siguientes funciones veritativas funciones asociadas a $J_k p$ (Rosser y Turquette, XVIII 288, 16 ff.):

$J_k p$ tiene el valor 1 si p tiene el valor k,

$J_k p$ tiene el valor m si p tiene un valor distinto de k.

Entonces puede interpretarse que $J_k p$ afirma fuertemente (y no afirma simplemente como lo hace la función de identidad (13.21)) que p tiene el valor veritativo k. Para $m = 3$, J_1 se define por la tabla veritativa

(1 3 3)

es decir, afirma fuertemente que p tiene el valor 1 (y niega que pueda tener cualquier otro valor). J_2 se define por la tabla veritativa

(3 1 3)

es decir, afirma fuertemente que p tiene el valor 2 (y ningún otro valor). Del mismo modo J_3 se define por la tabla veritativa

(3 3 1)

y afirma fuertemente que p tiene el valor 3 (y ningún otro valor).

13.32. Así para $m = 3$, el valor veritativo de J_1 ($\sim p$) se da por la tabla veritativa

(3 3 1).

Esta afirma fuertemente que p es (fuertemente) falso y niega que tenga cualquier otro valor.

13.33. Considérese que $J_1(p \cdot q)$ tiene como valores veritativos los valores dados por la tabla veritativa

(133 333 333).

Esta afirma fuertemente que p y q son ambos (fuertemente) verdaderos y rechaza cualquier otra situación más "débil". Hay afirmaciones similares para la disyunción, implicación y equivalencia, a saber:

$J_1(p \vee q)$ con tabla veritativa: (111 133 133)
$J_1(p \supset q)$ con tabla veritativa: (133 113 111)
$J_1(p \equiv q)$ con tabla veritativa: (133 313 331).

13.4. Otras conectivas

13.41. Post (2801) y otros después que él (p. ej., Rose XVIII 66) han definido una negación cíclica np que tiene el valor 1 si p tiene el valor m y el valor $k + 1$ si p tiene el valor k diferente de m. Así para $m = 3$, la función que tiene ⌜np⌝ como forma asociada se define por la tabla veritativa

(2 3 1)

y la función que tiene ⌜n(np)⌝ o ⌜n^2p⌝ como forma asociada se define por la tabla veritativa

(3 1 2).

La función que tiene ⌜n(n(np))⌝ o ⌜n^3p⌝ como forma asociada se define por la tabla veritativa

(1 2 3)

y así sucesivamente.

13.42. También podríamos mencionar la conectiva 'T' usada en axiomatizaciones de lógica trivalente (Slupecki II 46; Rosser y Turquette, XVIII 288, pp. 17, 107). La función que tiene ⌜Tp⌝ como forma asociada se define por la tabla veritativa

(2 2 2).

Tp tiene el valor 2 cualquiera que pueda ser el valor de p. En lógica bivalente existen funciones similares, una que tiene siempre el valor 1 y otra que tiene siempre el valor 0, no importa cual sea el valor veritativo del argumento.

14. Lógicas modales

14.1. Introducción. La lógica modal es tan antigua como Aristóteles. Las lógicas modales formalizadas fueron formuladas por Lewis hacia 1918 (2159), y desde entonces se han desarrollado muchos sistemas de lógica

modal consistentes y distintos. Su desacuerdo con las propiedades de la implicación material (implicación como se ha definido en 10.44) condujo a Lewis a formular un sistema en el que la implicación reflejase más estrechamente el uso ordinario no-técnico de 'si... entonces...'. Su intención era eliminar las llamadas "paradojas" de la implicación material (10.44), a saber, que una proposición falsa implica materialmente a cualquier proposición, y que una proposición verdadera es implicada materialmente por cualquier proposición. Lewis elimina de hecho estas "paradojas", pero aparecen "paradojas" análogas en otro nivel, ya que en su sistema una proposición necesaria es "implicada estrictamente" por cualquier proposición, y una proposición imposible "implica estrictamente" cualquier proposición.

14.2. LA LÓGICA MODAL COMO UNA EXTENSIÓN DE LA LÓGICA CLÁSICA. Limitamos nuestra discusión presente a las lógicas modales que son extensiones de la lógica clásica (bivalente). Fitch ha formulado una lógica modal que es una extensión de la lógica intuicionista con cuantificadores (XIV 2161). (Para una forma revisada de ésta, véase 24.4.) No consideraremos aquí las lógicas modales de Łukasiewicz (1868) que son lógicas polivalentes con una interpretación modal.

14.3. NECESIDAD Y POSIBILIDAD EN LAS LÓGICAS MODALES. Nos limitamos a la discusión de las lógicas *aléticas* modales, esto es, a la lógica con modos veritativos. (Para la discusión de los diferentes tipos de modalidades, véase Von Wright XVIII 174, p. 2.) Las lógicas modales aléticas tienen la propiedad de contener no sólo afirmaciones tales como alguna proposición p es verdadera, sino que también contienen afirmaciones más fuertes tales como p es necesario, y afirmaciones más débiles tales como p es posible. Si afirmamos que p es necesario, entonces también podemos afirmar que p es verdadero; y si afirmamos que p es verdadero, entonces también podemos afirmar que p es posible. ⌜p es posible⌝ se ha simbolizado como ⌜$\Diamond p$⌝ (4561) o en la notación polaca por ⌜Mp⌝ (1868). ⌜p es necesario⌝ se escribe ⌜$\Box p$⌝ (Barcan XI 96; [F] 64); en la notación polaca se escribe ⌜Lp⌝ o ⌜Np⌝ o como ⌜$\# p$⌝.

14.4. FUNCIONES MODALES Y MODALIDADES

14.41. Siguiendo parcialmente a Parry (V 37), definimos las funciones modales de la manera siguiente:

(1) Cualquier variable proposicional es una forma asociada (05.3) de una función modal.

(2) Si 'P' y 'Q' son formas asociadas de funciones modales, también lo son '$\Box P$', '$\sim P$', '$P \cdot Q$', '$P \vee Q$' y '$\Diamond P$'.

Entonces decimos que una modalidad es cualquier función modal cuya forma asociada no tenga operadores distintos a '$\sim$', '$\Box$', o '$\Diamond$'. Así '$\Box p$', '$\Diamond p$', '$\Box \sim p$', y '$\Diamond \sim p$' (donde 'p' es una variable del lenguaje objeto) todas representan modalidades y pueden traducirse como 'p es necesario', 'p es posible', 'p es necesariamente falso', y 'p es posiblemente falso' respectivamente. Del mismo modo '$\sim \Box p$', '$\sim \Diamond p$', '$\sim \Box \sim p$', y '$\sim \Diamond \sim p$' todas representan modalidades y pueden traducirse respectivamente como 'p no es necesario' (que equivale a 'p es posiblemente falso'), 'p es imposible' (que equivale a 'p es necesariamente falso'), 'p no es necesariamente falso' (que equivale a 'p es posible'), y 'p no es posiblemente falso' (que equivale a 'p es necesario'). Estas son todas las modalidades simples. Otras modalidades pueden representarse por '$\Box\Box p$', '$\Box \Diamond p$', '$\Diamond \Diamond p$', '$\Diamond \Box p$', y así sucesivamente. Estas modalidades múltiples se tratarán en el apartado 14.53 siguiente.

14.42. Cuando los símbolos modales '$\Box$' y '$\Diamond$', se combinan no sólo con '$\sim$' sino también con '$\cdot$', '$\vee$', '$\supset$' y '$\equiv$', se representan varias funciones modales distintas a las modalidades. Algunas de éstas se mencionarán ahora.

14.43. '$p \dashv q$' se usa como equivalente a '$\sim \Diamond [p \cdot \sim q]$' (Lewis 2159, p. 293) o a '$\Box [p \supset q]$' ([F] 66). La función así representada se llama "implicación estricta". Traducimos '$p \dashv q$' como 'p implica estrictamente q' o como 'p implica necesariamente q'.

14.44. '$p \equiv q$' ([F] 77) y a veces '$p = q$' (4561) se usa como equivalente a '$[p \dashv q] \cdot [q \dashv p]$' o a '$\Box [p \equiv q]$'. Traducimos '$p \equiv q$' como '$p$ es necesariamente (o estrictamente) equivalente a q'. La función así representada se denomina "equivalencia estricta".

14.45. '$p \circ q$' (Lewis 2159, p. 293; [F] 75) se usa a veces como equivalente a '$\Diamond [p \cdot q]$'; esta expresión debe traducirse como 'es posible que p y q a la vez' o como 'p y q son compatibles (consistentes) mutuamente'. La función así representada se denomina "consistencia".

14.5. Distinción de sistemas

14.51. Lo anterior podría ser suficiente para realizar una tosca traducción de los símbolos modales usados con más frecuencia, ya que la mayoría

de los sistemas conocidos de lógica modal usan los mismos pocos tipos de símbolos. Sin embargo, debe subrayarse que pueden construirse infinitas lógicas modales no equivalentes, y que un sistema dado es susceptible de distintas interpretaciones.

14.52. Para las proposiciones modales pueden darse axiomas y reglas similares a los de las proposiciones cuantificadas universalmente (21). Estas reglas y axiomas pueden añadirse a un sistema de lógica bivalente. Algunos de estos axiomas y reglas son:

(1) '$\Box p \supset p$';

(2) '$[p \supset q] \supset [\Box p \supset \Box q]$'; y

(3) si 'p' es un teorema, entonces '$\Box p$' es un teorema.

También podemos tener la definición de $\Diamond p$ como equivalente a $\sim\Box\sim p$. Los axiomas y reglas análogos para las proposiciones cuantificadas universalmente son:

(1) '$(x)\phi x \supset \phi x$';

(2) '$(x)\,[\phi x \supset \psi x] \supset [(x)\phi x \supset (x)\psi x]$'; y

(3) si 'ϕx' es un teorema, entonces '$(x)\phi x$' es un teorema.

Además, $(\exists x)\phi x$ puede definirse como equivalente a $\sim (x) \sim \phi x$. (Compárese (1), (1m), (1o), (1p) y (2) de 23.4 con (3a), (3b), (3c), (3d) y (4) de 24.4 respectivamente).

14.53. Von Wright construyó tres sistemas de lógica modal, M, M′ y M″ (XVIII 174), usando reglas y axiomas esencialmente equivalentes a los del parágrafo 14.52. Entre estos sistemas surgen diferencias según las distintas posibilidades de reducción de modalidades con dos o más ocurrencias de '$\Box$' o '$\Diamond$' a modalidades más simples. En M no hay reglas de reducción de este tipo. En M′ hay una equivalencia entre '$\Box p$' y '$\Box\Box p$' y entre '$\Diamond p$' y '$\Diamond\Diamond p$'. En M″ también hay una equivalencia entre '$\Box\Diamond p$' y '$\Diamond p$' y entre '$\Diamond\Box p$' y '$\Box p$'. Por tanto en M″ todas las modalidades son reducibles a las de cero o una ocurrencia del símbolo '$\Box$' o '$\Diamond$'. Así M″ sólo distingue seis modalidades, cuyas formas asociadas son 'p', '$\sim p$', '$\Box p$', '$\Diamond p$', '$\sim \Box p$', y '$\sim \Diamond p$' (donde 'p' es una variable del lenguaje objeto). Los sistemas M′ y M″ son equivalentes a los sistemas de Lewis S4 y S5 respectivamente; el sistema M es algo más fuerte que el sistema S2 de Lewis ya que la regla (3) del apartado 14.52 no se admite en S2 (cp. 4561 apéndice).

15. Sistemas de tipo intuicionista y sistemas afines

15.1. INTRODUCCIÓN. Tanto en los sistemas de tipo intuicionista que vamos a considerar ahora, como en el cálculo bivalente y en los cálculos polivalentes, no hay ningún aparato para la expresión de modalidades. Pero los sistemas intuicionistas difieren de los sistemas bivalentes en que carecen de principio de tercio excluso y de algunos sistemas polivalentes en que carecen del principio generalizado de tercio excluso" al efecto de que cada proposición tiene uno y solamente uno de los valores veritativos del sistema. Para estos sistemas de tipo intuicionista no hay tablas veritativas con un número finito de valores veritativos tales que cualquier teorema del sistema obtiene un valor veritativo designado para cualquier combinación de los valores veritativos de sus variables (cp. **4186**).

15.2. EL CÁLCULO PROPOSICIONAL INTUICIONISTA DE BROUWER-HEYTING

15.21. El más importante de estos sistemas o cálculos es el cálculo proposicional de Brouwer-Heyting (**3852**). Este sistema emplea la conectiva 'no' con un argumento y las cuatro conectivas 'y', 'o' 'si... entonces...', y 'si y sólo si' con dos argumentos cada una. El significado de estas conectivas sólo puede entenderse totalmente estudiando el modo en que funcionan en el sistema. Sin embargo, las siguientes notas pueden servir como una aclaración informal.

15.22. La proposición no-p (esto es, la proposición p es falso) es verdadera si y sólo si p implica falsedad (y una proposición falsa implica cualquier otra proposición). En particular puede probarse no-p si y sólo si a partir de p puede deducirse una contradicción. Por tanto no-no-p puede probarse cuando quiera que pueda inferirse una contradicción a partir de la suposición de no-p. Esta situación puede surgir frecuentemente en lógica intuicionista sin que nos sea posible probar p. Así, para el intuicionista, no-no-p es una proposición más débil que p mismo.

15.23. La conjunción de p y q es verdadera si y sólo si tanto p como q son ambas verdaderas, y puede probarse si y sólo si tanto p como q pueden ambas probarse.

15.24. La disyunción de p y q es verdadera si y sólo si al menos una de las proposiciones p y q es verdadera, y puede probarse precisamente

en el caso de que al menos una de ellas p y q pueda probarse. En este segundo aspecto (en cuanto a la probabilidad) la lógica intuicionista difiere vivamente de la lógica clásica (bivalente). Pues en lógica clásica podemos probar la disyunción de p y q en muchos casos en los que no podemos probar o p o q; esto es, nuestros recursos nos permiten establecer que una u otra de las dos proposiciones es verdadera, sin permitirnos decidir cuál. En particular, clásicamente podemos probar siempre la disyunción de p con no-p, pero intuicionísticamente podemos probar esta disyunción sólo si podemos decidir cuál de estas dos alternativas es válida realmente.

15.25. La implicación de q por p puede probarse si y sólo si q es deducible a partir de p.

15.26. La equivalencia de p y q puede probarse si y sólo si p y q son deducibles cada una a partir de la otra.

15.27. Las funciones de lógica intuicionista no son interdefinibles del mismo modo que lo son las de lógica bivalente (12.4). Por ejemplo, $p \supset q$ no es equivalente a $\neg p \vee q$ o a $\neg [p \cdot \neg q]$. Pero $\neg p \vee q$ implica $p \supset q$ (en la lógica de Brouwer-Heyting) y $p \supset q$ implica $\neg [p \cdot \neg q]$, incluso en lógica minimal (15.5). Normalmente la notación estaría conforme con el apartado 15.3 que se expone a continuación.

15.3. NOTACIÓN PARA EL CÁLCULO INTUICIONISTA

Traducción castellana	Heyting (3852, p. 43) (3853, p. 60)	Kleene ([K] 69, 113)
no-p (es absurdo que p)	$\neg p$	$\neg p$
p y q	$p \wedge q$	$p \& q$
p o q	$p \vee q$	$p \vee q$
si p entonces q	$p \supset q$	$p \supset q$
p si y sólo si q	$p \supset\subset q$	$p \sim q$

15.4. INTERPRETACIÓN DEL CÁLCULO INTUICIONISTA. Gödel ha establecido una correspondencia (o distintas correspondencias equivalentes) dando una interpretación del cálculo intuicionista en el cálculo modal M′ o S4 (41812). Si en una expresión proposicional que puede probarse en el

cálculo intuicionista se reemplaza cada expresión de cualquiera de las formas que aparecen en la línea superior de la tabla siguiente por una expresión de la forma correspondiente en la segunda línea de la tabla, la expresión resultante podrá probarse en el cálculo modal M′ o S4 (14.53).

$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \prec\succ q$
$\sim \Box p$	$\Box p \cdot \Box q$	$\Box p \vee \Box q$	$\Box p \supset \Box q$	$\Box p \equiv \Box q$

Podemos traducir el símbolo '$\Box$' por 'puede probarse'. Entonces '$\neg p$', '$p \wedge q$', '$p \vee q$', '$p \supset q$' y '$p \prec\succ q$' se traducirán respectivamente como 'p no puede probarse', 'p puede probarse y q puede probarse', 'p puede probarse o q puede probarse', 'si p puede probarse entonces q puede probarse', y 'p puede probarse si y sólo si q puede probarse'.

15.5. Cálculo minimal y cálculo D. En el *cálculo minimal* de Johansson (II 47), la negación de p puede definirse como equivalente a $p \supset \lambda$, donde el símbolo 'λ' denota una proposición arbitrariamente establecida, que usualmente debe interpretarse como una proposición considerada como absurda en el sistema. En el cálculo D de Curry (XVIII 266) $\neg p$ puede definirse como en el cálculo minimal, pero $p \vee \neg p$ se admite como un axioma. Las notaciones del cálculo minimal y del cálculo D son las mismas que las del cálculo intuicionista.

15.6. El sistema de Fitch

15.61. Entre los sistemas que carecen de principio de tercio excluso (15.1) otro ejemplo es el sistema del libro de Fitch [F]. Este sistema es de algún modo similar al sistema intuicionista. Una diferencia es que los intuicionistas equiparan 'no-p' con 'p implica una falsedad', mientras Fitch distingue las dos. Supongamos por ejemplo que estamos investigando una cierta propiedad P de los números. Supongamos que logramos demostrar que la suposición de que todo número tiene la propiedad P conduce a una contradicción, pero aun no podemos mostrar un número que carezca de la propiedad P. Entonces tanto el intuicionista como Fitch (si estuvieran satisfechos con los métodos empleados en la derivación de la contradicción) podrían inferir que q implica una falsedad, donde q es la proposición de que todo número tiene la propiedad P. El intuicionista también podría inferir la proposición no-q, pero Fitch sólo podría inferir esto si se ha mostrado un número particular que

carezca de la propiedad *P*. Así para el intuicionista puede establecerse una proposición no-*p* suponiendo *p* y derivando una contradicción. Pero para Fitch esto no es así.

15.62. *Notación para el cálculo proposicional de Fitch*

Traducción castellana	Fitch ([F] 53, 32, 43, 14, 37)
no *p* (es falso que *p*)	$\sim p$
p y *q*	$p \& q$
p o *q*	$p \vee q$
si *p* entonces *q*	$p \supset q$
p si y sólo si *q*	$p \equiv q$

16. Alcance de los operadores lógicos

16.1. INTRODUCCIÓN. La lógica simbólica necesita notaciones para indicar claramente el alcance de los operadores lógicos, es decir, para indicar la extensión de las expresiones que son los operandos de una operación dada. La necesidad de una notación tal surge con la lógica proposicional, pero aquí también damos los principios de una notación de este tipo para otras partes de la lógica.

16.11. Nuestro principal interés, con respecto al cálculo proposicional, se centra en las operaciones lógicas tales como la negación y la conjunción que se expresan por medio de conectivas (operadores que no incluyen variables ligadoras (06.1)). Pero en partes posteriores también consideramos operadores que contienen variables ligadoras.

16.12. Una operación se expresa por medio de una expresión llamada operador. Si hay solamente un operando, usualmente el operador se *prefija* al argumento: la lógica simbólica moderna raramente usa operadores como sufijos, tales como '2' y '3' en $\ulcorner(a^2)^3\urcorner$ (excepto, por ejemplo, los de los apartados 12.2 y 66.19). Un operador (diádico) con dos operandos puede prefijarse a sus operandos (por ejemplo, véase la notación polaca de 16.6), pero es más frecuente escribirlo "intercalado" entre sus operandos, por ejemplo, la '$\vee$' en $\ulcorner p \vee q \urcorner$.

16.13. Algunas operaciones que se designan explícitamente en algunos sistemas se indican en otros por simple yuxtaposición. Tal es el caso del símbolo de la conjunción entre proposiciones (véase 12.33).

16.2. Paréntesis

16.21. Los paréntesis se usan para indicar la extensión de los operandos, tal y como se hace en álgebra. Estos paréntesis se omiten cuando no hay peligro de ambigüedad, por ejemplo, en una expresión que conste de una letra. Así podemos escribir '$p \vee q$' y no '$[p] \vee [q]$'.

16.22. Hay diferentes formas de paréntesis tales como los paréntesis, corchetes, llaves y paréntesis de la forma: $\langle\ \rangle$. El uso de estas diferentes formas de paréntesis con diferentes tipos de operaciones no nos concierne aquí. Un problema que nos concierne aquí es el de indicar el alcance de los paréntesis cuando ocurren de tal manera que hay paréntesis dentro de paréntesis.

16.23. Esta distinción de alcance no se indica generalmente mediante la forma o el tipo de paréntesis que se usan, como se hace a veces en los manuales de matemática elemental. Por lo general, se usa una sola forma y tipo de paréntesis. Por ejemplo, en muchas formulaciones de lógica proposicional, los paréntesis son el único tipo de paréntesis que se usa. Donde únicamente se emplea un solo tipo de paréntesis, la delimitación de los operandos se indica automáticamente por el modo en que los paréntesis se emparejan o se incluyen en los alcances de otros, de modo que para cada paréntesis izquierdo encontramos un paréntesis derecho correspondiente que es su pareja.

16.3. Prioridad entre operadores

16.31. En álgebra corriente '$(-ab = c)$' se interpreta como equivalente a '$((-(ab)) = c)$'. Por tanto la operación indicada por '=' se considera como más importante o con prioridad a la operación indicada por '—', y esta última tiene prioridad sobre la operación (multiplicación) indicada por yuxtaposición. Es costumbre en algunos tipos de sistemas disponer los operadores (y las operaciones que representan) en orden (o "rango") de prioridad. Si hay ambigüedad con respecto al alcance de algún operador a causa de la carencia de paréntesis que indiquen tal alcance, y si la ambigüedad puede resolverse otorgando a un operador con mayor

prioridad un alcance mayor y a un operador con menor prioridad un alcance menor, entonces esta eliminación de la ambigüedad es la preferible. Si hay distintas eliminaciones de ambigüedad "preferibles" en este sentido, entonces debemos recurrir a principios ulteriores, discutidos a continuación (16.51) para resolver la ambigüedad resultante. Por ejemplo, en la expresión '$p \equiv q \vee r \vee s$' podríamos concluir los siguientes modos de agrupación e indicación de alcance:

(1) $[p \equiv q] \vee [r \vee s]$
(2) $[p \equiv [q \vee r]] \vee s$
(3) $p \equiv [q \vee [r \vee s]]$
(4) $p \equiv [[q \vee r] \vee s]$.

Si '$\equiv$' se considera con prioridad sobre '$\vee$', entonces los métodos (3) y (4) son preferibles a los métodos (1) y (2) porque tanto el método (3) como el (4) proporcionan a la ocurrencia del operador '$\equiv$' un alcance mayor que cualquiera de las ocurrencias del operador '$\vee$'. De hecho, por esta razón, cualquier agrupación distinta de (3) y (4) sería incorrecta. Sin embargo, con el fin de elegir entre (3) y (4), debemos usar convenciones que establezcan una preferencia de agrupación a la izquierda o agrupación a la derecha. Si la agrupación a la izquierda es la agrupación preferida (o tácitamente entendida), entonces (4) es la solución correcta de la ambigüedad original.

16.32. Las reglas de prioridad se usan en casi todos los sistemas, excepto en aquellos que emplean la notación polaca (16.6) o en los sistemas de lógica combinatoria (capítulo 4). Las reglas de prioridad más corrientes (análogas a las del álgebra) son las siguientes:

(a) una operación indicada por yuxtaposición tiene menos prioridad que cualquier otra;
(b) una operación indicada por un operador o conectiva prefijado tiene prioridad sobre una operación indicada por yuxtaposición;
(c) una operación indicada por una conectiva u operador intercalado tiene prioridad sobre una indicada por yuxtaposición o por una conectiva prefijada.

16.33. Frecuentemente se relacionan otras reglas de prioridad. Debe consultarse la introducción de cada trabajo para establecer sus reglas de prioridad.

16.4. Puntuación

16.41. Para eliminar paréntesis en exceso e incluso para eliminar los paréntesis totalmente, se usa frecuentemente una puntuación que reemplaza los paréntesis, y esto se hace de dos formas.

16.42. En Peano (7114), en [PM] 9, y en trabajos inspirados en [PM], los signos de puntuación consisten en uno o varios puntos gruesos. Un grupo de (uno o más) puntos se atribuye a un operador para indicar el alcance de ese operador. Un grupo mayor de puntos se considerará como una puntuación "más fuerte" que un grupo menor de puntos. Si dos grupos del mismo número de puntos se atribuyen a dos operadores de prioridad diferente, el grupo atribuido al operador de mayor prioridad se considerará la puntuación más fuerte. Los puntos pueden usarse para indicar el alcance del modo siguiente:

(a) Los puntos pueden colocarse delante y detrás de un operador o conectiva del tipo de '$\vee$' o '$\supset$'. Así el alcance del operador o conectiva se extiende hacia atrás (hacia la izquierda) desde el grupo de puntos de la izquierda hasta el principio de la expresión o hasta un paréntesis izquierdo o hasta que se encuentre una puntuación de igual o mayor fuerza que la de ese grupo de puntos. De modo similar, el alcance del operador o conectiva se extiende hacia adelante (hacia la derecha) desde el grupo de puntos de la derecha hasta el final de la expresión o hasta un paréntesis derecho o hasta que se encuentra una puntuación de igual o mayor fuerza que la de ese grupo de puntos. Por ejemplo, $\ulcorner r \supset [p \supset q \cdot \supset p : \supset \cdot s \supset t]\urcorner$ se interpretaría como $\ulcorner r \supset [[[p \supset q] \supset p] \supset [s \supset t]]\urcorner$.

(b) Los puntos pueden colocarse después de un operador prefijado tal como $\ulcorner(\exists x)\urcorner$ (cp. 21.1). Entonces el alcance del operador se extiende hacia adelante como en (a). Por ejemplo, $\ulcorner(x) \cdot \phi x \supset \psi x \cdot \supset \chi x\urcorner$ se interpretaría como $\ulcorner(x)\,[\phi x \supset \psi x] \supset \chi x\urcorner$.

(c) Si un operador se indica por yuxtaposición hay sólo un grupo de puntos, colocado entre los operandos, y el alcance se extiende hacia atrás y hacia adelante como en (a). También en el caso de que un operador sea él mismo un solo punto, este punto puede reemplazarse por un grupo de puntos para indicar el alcance del operador. Por ejemplo, $\ulcorner p : q \supset \cdot p \supset q\urcorner$ se interpretaría como $\ulcorner p \cdot [q \supset [p \supset q]]\urcorner$.

16.43. La regla dada antes es la regla para [PM] y para los trabajos que dependen de él. En recientes trabajos americanos (cp. [Ch] 75) se usan

para puntuación puntos simples en vez de puntos múltiples. La convención es que si un operador es seguido por un punto, el alcance se extiende (a la derecha) hasta el final de la expresión o hasta llegar a un paréntesis derecho. Para indicar el alcance hacia atrás (hacia la izquierda) debemos contar con paréntesis o con la regla de asociación por la izquierda (16.5). Esta regla no se encuentra en [PM]. Estos procedimientos han sido refinados por distintos autores. Debe consultarse la introducción de cada trabajo para la enunciación exacta de la regla seguida.

16.5. Reglas de abreviación

16.51. Muchos autores americanos admiten actualmente una regla general de *asociación por la izquierda* (cp. [Ch] 74). Esto puede explicarse del modo siguiente: Si las reglas de prioridad y las reglas de puntos no son suficientes para indicar los alcances de los operadores en una expresión porque se omiten los paréntesis, entonces se entiende que los paréntesis deben colocarse insertándolos a la izquierda tan lejos como sea posible compatiblemente con la naturaleza de los operadores correspondientes. Por tanto $`p \vee q \vee r`$ se interpretaría como $`[p \vee q] \vee r`$ y $`p \equiv q \equiv r \supset s`$ se interpretaría como $`[[p \equiv q] \equiv r] \supset s`$.

16.52. [PM] no tiene una regla tal de asociación por la izquierda, pero usa (especialmente en la lógica de relaciones (por ejemplo [PM] * 34.22)) distintas reglas "para la eliminación de paréntesis" que valen de hecho como casos especiales de asociación por la derecha.

16.53. Trabajos más antiguos, entre ellos [PM], también usan abreviaciones que tienen sus análogos en las matemáticas, tales como la de $`p \equiv q \equiv r`$ para la conjunción de $`p \equiv q`$ y $`q \equiv r`$ ([PM] * 4.02) y la de $`p \supset q \supset r`$ para la conjunción de $`p \supset q`$ y $`q \supset r`$ ([PM] * 3.02).

16.6. Notación polaca libre de paréntesis. Łukasiewicz ha inventado una notación que elimina el uso de paréntesis (1866). Cada conectiva u operador tiene un número fijado de argumentos, y cada conectiva y operador se escribe como un prefijo inmediato de sus operandos. En lugar de '$\supset$', existe una conectiva 'C' que toma dos argumentos. Así en lugar de $`p \supset q`$, se usaría la notación $`Cpq`$. *De* modo similar, $`p \vee q`$ se escribe como $`Apq`$, y $`p \cdot q`$ como $`Kpq`$. Por ejemplo, la expresión

$$[p . q] \supset [p \vee q]$$

se escribiría como

$$\mathrm{CK}pq\mathrm{A}pq$$

y la expresión

$$[p \supset [q \supset r]] \supset [[p \supset q] \supset [p \supset r]]$$

se escribiría como

$$\mathrm{CC}p\mathrm{C}q r\mathrm{CC}pq\mathrm{C}pr.$$

CAPITULO 2

EL CALCULO FUNCIONAL DE PRIMER ORDEN

20. Funciones proposicionales de individuos

20.1. En el cálculo proposicional tratamos un tipo de funciones proposicionales llamadas funciones veritativas (10.23). El cálculo proposicional fue formulado en el Capítulo 1 usando tablas veritativas. Este cálculo también pudo haberse formulado usando axiomas y reglas de inferencia (01.12). El último método o sus extensiones, como en las técnicas de deducción natural ([F] 20), se usan ordinariamente en el caso del *cálculo funcional de primer orden* y en los *cálculos funcionales de orden superior* (Capítulo 3). Estos cálculos tratan, además de funciones veritativas, sobre funciones de cierto tipo distinto que no se pueden tratar mediante el análisis de tablas veritativas. En el cálculo funcional de primer orden estas funciones distintas son las *funciones proposicionales de individuos,* también llamadas simplemente *funciones de individuos.* Las funciones de este tipo presuponen una categoría de los llamados *individuos* (05.7). No es importante si estos "individuos" son realmente individuos en algún significado filosófico específico del término. Casi cualquier clase podría elegirse para servir como la clase de los "individuos" que aquí se consideran, y la elección puede incluso permanecer inespecificada. El dominio de la definición de toda función de individuos de un argumento es esta clase de individuos, y el dominio de la definición de toda función de individuos de n argumentos, donde $n > 1$, es la clase de n-tuplos ordenados de individuos. Por otra parte, los valores de estas funciones de individuos son proposiciones. Por tanto podemos considerar estas funciones como atributos o propiedades (o clases) de individuos y como relaciones mismas (o relaciones) entre individuos

(05.7-05.9). Así como el cálculo proposicional trata primariamente de proposiciones, así el cálculo funcional de primer orden trata primariamente con proposiciones y con estas funciones proposicionales de individuos. Algunas de las proposiciones en el cálculo funcional de primer orden son valores de estas funciones de individuos y por tanto son analizables según el resultado de la aplicación de tales funciones a los individuos, mientras que en el cálculo proposicional se ignora cualquier análisis de este tipo de las proposiciones. A veces se usa el término 'cálculo de predicados' en lugar del término 'cálculo funcional'. Esto lo hacen con frecuencia aquellos autores que usan 'predicado' como sinónimo de 'función proposicional' (por ejemplo, [HB] y [K]) o como sinónimo de 'símbolo de función proposicional' (por ejemplo, Carnap). Quine usa el término 'predicado' de un modo un tanto diferente (XII 17).

20.2. Para tratar de la clase de los individuos se usan variables especiales. Corrientemente se usan con este fin letras itálicas minúsculas, con o sin suscritos numéricos. Estas suelen tomarse del final del alfabeto ([Ch] 169; [Q] 69), pero Kleene ([K] 143) las toma del principio del alfabeto, y Hilbert-Bernays ([HB] i 96) usa letras del principio y del medio del alfabeto como variables libres (cp. 06.4, 21.6) y las del final del alfabeto como variables individuales ligadas. A veces también se usan constantes individuales especiales (nombres de individuos).

20.3. Las variables especiales que se refieren a funciones de individuos se usan generalmente en el cálculo funcional de primer orden como variables libres, pero nunca como variables ligadas; y a veces se usan constantes que sirven como nombres de funciones de individuos. Deben usarse símbolos de funciones de por lo menos uno de estos dos tipos, y pueden usarse de ambos tipos. Prefijando un símbolo de función de este tipo a una variable individual o a una constante (o a n símbolos de argumentos en el caso de funciones de n argumentos) se da lugar a una *fórmula atómica* del cálculo. También pueden usarse variables y constantes proposicionales y son los únicos tipos distintos de fórmulas atómicas. (Las proposiciones pueden considerarse como funciones de individuos de cero argumentos, de modo que las variables proposicionales y constantes pueden considerarse como variables funcionales y constantes de un tipo especial). Si 'F' es el nombre de una función de individuos F de un argumento, y por tanto un nombre de un atributo (propiedad) de individuos, y si 'a' es el nombre de un individuo a, entonces '$F(a)$' expresa la proposición: a tiene el atributo F. Los términos 'atributo' y

'propiedad' se usan aquí como intercambiables más o menos. Si ⌜G⌝ es el nombre de una función de individuos G de dos argumentos (y por tanto una relación de dos términos entre individuos), y si ⌜a⌝ y ⌜b⌝ son nombres de los individuos a y b respectivamente, entonces ⌜$G(a, b)$⌝ expresa la proposición de que a tiene la relación G con b.

20.4. Algunos autores llaman "variables predicativas" a las variables funcionales (cp. 20.1). [HA] (65) habla de variables predicativas '$F(.)$', '$G(., .)$', '$H(., ., .)$' y así sucesivamente. El simbolismo que emplea el punto se utiliza en las explicaciones para mostrar de algún modo que 'F', 'G' y 'H' representan variables predicativas cuando 'F', 'G' o 'H' es acompañada por el número adecuado de variables como se indica por el número de puntos que hay en los paréntesis que siguen a la letra dada. Un uso explicativo similar de fórmulas con lugares vacíos *(Leerstellen)* puede encontrarse en Carnap (3523, p. 3) y puede compararse con el uso de las expresiones '$\phi\hat{x}$' (*20) y '$\phi(\hat{x}, \hat{y})$' (*21) en [PM].

20.5. Church ([Ch] 169) indica el número de argumentos que toma un símbolo de función mediante números superescritos. Así usa 'F^1', 'G^1', 'F_1^1', ..., como variables funcionales para funciones de un argumento, 'F^2', 'F_1^2', 'G_2^2', ..., como variables funcionales para funciones de dos argumentos, y así sucesivamente. Normalmente se omiten los superescritos si no hay peligro de ambigüedad. Podrían emplearse diferentes series de variables, en lugar de símbolos con superescritos, como variables funcionales singulares, binarias, ...

21. Cuantificadores

21.1. En la discusión siguiente usamos *fórmula* en vez de lo que con frecuencia se llama *fórmula bien formada.* Partiendo de las fórmulas atómicas, se construyen fórmulas más complejas usando algunos o todos los operadores (conectivas) que se usan en el cálculo proposicional, junto con dos tipos de operadores llamados *cuantificadores*: cuantificador universal y cuantificador existencial. Si ⌜x⌝ es una variable cuyo rango es la clase de los individuos, un cuantificador universal se escribe usualmente como ⌜(x)⌝ ([PM]) o como ⌜$\forall x$⌝ (Gentzen 4422) y se lee como ⌜para cada individuo x⌝ o como ⌜para todos los individuos x⌝. Un cuantificador existencial se escribe usualmente como ⌜$(\exists x)$⌝ ([PM]), o como ⌜$\exists x$⌝ (Gentzen 4422), o como ⌜(Ex)⌝ ([HA], [HB], [*R*]), y se lee como ⌜para algún

individuo x' o como 'existe un individuo x tal que'. Aquí las palabras 'alguno' y 'uno' significan lo mismo que la frase 'al menos uno'. Así si 'F' y 'G' son nombres de funciones de individuos de un argumento, y si 'x' es una variable individual, entonces '$(x)\ [F(x) \supset G(x)]$' significaría que para cada individuo x, si x tiene el atributo F, entonces tiene el atributo G, o que cada individuo que tiene el atributo F tiene el atributo G. El efecto de aplicar un cuantificador '(x)' a la fórmula '$(\ldots x \ldots)$' (cp 08.8) que contenga una ocurrencia libre de 'x' (pero en la que no ocurre ninguna otra variable libre) es construir una sentencia '$(x)\ (\ldots x \ldots)$' que establece en efecto que la función que tiene '$(\ldots x \ldots)$' como una forma asociada es universal (es un atributo de todos los individuos). Así un cuantificador universal sirve como una señal para aseverar, en efecto, que un atributo de individuos (una función proposicional de individuos) es universal. De modo similar, un cuantificador existencial sirve como una señal para aseverar, en efecto, que un atributo de individuos (una función proposicional de individuos) no es vacía.

21.2. Suponiendo que el universo tenga un número finito n de individuos, '$(x)F(x)$' puede considerarse aproximadamente equivalente a '$F(x_1) \cdot F(x_2) \cdot F(x_3) \cdot \ldots \cdot F(x_n)$'. De modo similar '$(\exists x)F(x)$' puede considerarse aproximadamente equivalente a '$F(x_1) \vee F(x_2) \vee F(x_3) \vee \ldots \vee F(x_n)$'. (Empleamos aquí tres puntos para indicar la omisión de términos de una secuencia según la convención usual; pero este uso no debe confundirse con los usos descritos en 08.8 o en 20.4). Para proporcionar el caso de un número infinito de individuos, el cálculo funcional de primer orden debe derivarse de axiomas que proporcionen a las fórmulas con cuantificadores propiedades tales que, en el caso especial de un número finito de individuos, puedan obtenerse las equivalencias antes anotadas. Por tanto los cuantificadores pueden considerarse como operadores que expresan un tipo de operación generalizada de conjunción ("producto lógico") y disyunción ("suma lógica") (infinitas). Esto se refleja en las notaciones '$\prod_x$' (Schröder) 427, 4210, 4212) o '$\prod x$', (Łukasiewicz) o '$\bigcap_x$' (Tarski 2959) para el cuantificador universal, y '$\sum_x$', '$\sum x$', y '$\bigcup_x$' para el cuantificador existencial por los mismos autores respectivamente.

21.3. La aplicación de un cuantificador a cualquier fórmula genera otra fórmula. Por tanto, las fórmulas pueden tener múltiples cuantificadores, por ejemplo '$(x)\,(y)$', '$(\exists x)\,(\exists y)$', '$(x)\,(\exists y)$' o '$(\exists x)(y)$'. [PM] * 11 usa la abreviación '(x, y)' para '$(x)\,(y)$' o '$(\exists x, y)$' para '$(\exists x)\,(\exists y)$', y de modo similar con más de dos cuantificadores.

21.4. Los operadores intercalados siguientes son definibles por medio de cuantificadores

$$\ulcorner \phi x \supset_x \psi x \urcorner \quad \text{por} \quad \ulcorner (x)[\phi x \supset \psi x] \urcorner \quad ([\text{PM}]*10.02)$$
$$\ulcorner \phi x \equiv_x \psi x \urcorner \quad \text{por} \quad \ulcorner (x)[\phi x \equiv \psi x] \urcorner \quad ([\text{PM}]*10.03)$$

y de modo similar con dos o más cuantificadores. Por ejemplo

$$\ulcorner \phi xy \supset_{x,y} \psi xy \urcorner \quad \text{por} \quad \ulcorner (x, y)[\phi xy \supset \psi xy] \urcorner \quad ([\text{PM}]*11.05)$$
$$\ulcorner \phi xy \equiv_{x,y} \psi xy \urcorner \quad \text{por} \quad \ulcorner (x, y)[\phi xy \equiv \psi xy] \urcorner \quad ([\text{PM}]*11.06).$$

Se dice que los operadores $\ulcorner \supset_x \urcorner$, $\ulcorner \supset_{x,y} \urcorner$, ..., representan *implicación formal* y $\ulcorner \equiv_x \urcorner$ y $\ulcorner \equiv_{x,y} \urcorner$, ..., *equivalencia formal.* Church ([Ch] 171) da también la abreviación siguiente:

$$\ulcorner \phi x \mid_x \psi x \urcorner \quad \text{por} \quad \ulcorner (x)[\phi x \mid \psi x] \urcorner .$$

21.5. Usualmente se conviene que si $\ulcorner B \urcorner$ es una fórmula y $\ulcorner x \urcorner$ una variable individual, entonces $\ulcorner (x)B \urcorner$ y $\ulcorner (\exists x)B \urcorner$ son fórmulas, inclúso si $\ulcorner x \urcorner$ no ocurre en $\ulcorner B \urcorner$. Algunos autores, sin embargo, requieren que $\ulcorner x \urcorner$ ocurra libre en $\ulcorner B \urcorner$.

21.6. De conformidad con 06.4 y [Ch] 170, una ocurrencia de una variable $\ulcorner x \urcorner$ en una fórmula $\ulcorner A \urcorner$ se llama *ocurrencia ligada* de $\ulcorner x \urcorner$ con respecto a (y en) $\ulcorner A \urcorner$ si es una ocurrencia en una parte bien formada de $\ulcorner A \urcorner$ (aquí una parte de $\ulcorner A \urcorner$ que es una fórmula) de la forma $\ulcorner (x)B \urcorner$ o $\ulcorner (\exists x)B \urcorner$; de otro modo se llama *ocurrencia libre* de $\ulcorner x \urcorner$ con respecto a (y en) $\ulcorner A \urcorner$. Las *variables ligadas* de $\ulcorner A \urcorner$ son aquellas que tienen ocurrencias ligadas en $\ulcorner A \urcorner$ y las *variables libres* de $\ulcorner A \urcorner$ son aquellas que tienen ocurrencias libres en $\ulcorner A \urcorner$.

21.7. El cierre ([Q] 79) de una fórmula en el cálculo de primer orden se obtiene prefijando a la fórmula, para cada variable libre en esa fórmula, un cuantificador universal que contenga esa variable. Los cuantificadores se prefijan en hilera, a veces según una regla que determina su orden. Cuando Quine encierra una fórmula esquema entre sus "ángulos" o "cuasicomillas", '⌜' y '⌝' (Q 35), y prefija el signo de aseveración, '⊢', a la expresión completa, está aseverando que toda fórmula que sea una instancia del esquema es un teorema y también que el cierre de toda fórmula de este tipo es un teorema ([Q] 88).

22. Tablas de símbolos

TABLA A

Autor (páginas)	Variables individuales (20.2)	Variables funcionales (20.3)	Fórmulas atómicas (20.3)
[Ch] 169, 169, 169	$x, y, z, \ldots$	$F^1, G^2, \ldots$	$F^1(x), G^2(x, y), \ldots$
[HA] 58, 65, 65	$x, y, z, \ldots$	$F(.), G(.,.), \ldots$	$F(x), G(x, y), \ldots$
[HB] i 96, i 89, i 89	$x, y, z, \ldots$ (ligadas) $a, b, c, \ldots$ (libres)	$A, B( ), C(,), \ldots$	$A(x), B(x, y), \ldots$
[K] 143	$a, b, c, \ldots$	$A, B, A( ), \ldots$	$A, B, A(a), B(c, d), \ldots$
[Q] 69, 120	$x, y, \ldots$		$x \in y$
[R] 87, 208	$x, y, \ldots$ $x_1, x_2, \ldots$		$x \in y$
Otras notaciones	$x, y, \ldots$	$a, b, c, \ldots$ $r, s, t, \ldots$	ax rxy

TABLA B

Autor (páginas)	Cuantificador universal	Cuantificador existencial
[Ch] 171, 171	(x)	$(\exists x)$
[HA] 58, 59	(x)	$(\mathrm{E}x)$
[HB] i 95, i 95	(x)	$(\mathrm{E}x)$
[K] 69, 70	$\forall x$	$\exists x$
[Q] 69, 102	(x)	$(\exists x)$
[R] 88, 90	(x)	$(\mathrm{E}x)$
otras notaciones (cp. 21.2)	$\bigwedge_x$ $\bigwedge x$ $\prod_x$ $\prod x$ $\bigcap_x$	$\bigvee_x$ $\bigvee x$ $\sum_x$ $\sum x$ $\bigcup_x$

23. Un ejemplo de un cálculo funcional de primer orden

23.1. Ahora presentamos un ejemplo de un cálculo funcional de primer orden para ilustrar los métodos que se usan a veces para definir conceptos tales como *fórmula bien formada, axioma* y *teorema,* relativos a un cálculo de este tipo.

23.2. Sirvan 'x_1', 'x_2', ..., como variables para individuos, y 'P_1', 'P_2', ..., como variables proposicionales. Sirvan también 'F_1^1', 'F_2^1', ..., como variables funcionales de un argumento, 'F_1^2' 'F_2^2', ..., como variables funcionales de dos argumentos, y así sucesivamente. Definimos la clase de las fórmulas bien formadas (fbfs) del cálculo del modo siguiente:

(1) Toda variable proposicional es una fbf atómica.
(2) Si 'u' es una variable para individuos y 'f' es una variable funcional de un argumento, entonces '$f(u)$' es una fbf atómica; también si 'u' y 'v' son variables para individuos y 'g' es una variable funcional de dos argumentos, entonces '$g(u, v)$' es una fbf atómica; y de modo similar para las variables funcionales de tres argumentos, cuatro argumentos, y así sucesivamente.
(3) Toda fbf atómica es una fbf.
(4) Si 'A' y 'B' son fbfs, también lo son '$\sim A$', '$[A \cdot B]$', '$[A \vee B]$', y '$[A \supset B]$'.
(5) Si 'u' es una variable para individuos y si 'A' es una fbf, entonces '$(u)A$' y '$(\exists u)A$' son fbfs.
(6) 'A' es una fbf atómica sólo si el hecho de serlo se sigue de los puntos (1) o (2) anteriores; y es una fbf sólo si el hecho de serlo se sigue de los puntos (1)-(5) anteriores.

23.3. Por ejemplo, 'P_2' y '$F_1^3(x_1, x_2, x_1)$' son fbfs, y además fbfs atómicas, y '$(\exists x_2)P_2$', '$(x_1)F_1^3(x_1, x_2 x_1)$', '$[(\exists x_2)P_2 \supset (x_1)F_1^3(x_1, x_2, x_1)]$', y '$\sim (x_2)(x_1) F_1^3(x_1, x_2, x_1)$' son fbfs. En adelante se omitirán los paréntesis de los extremos.

23.4. Emplearemos infinito número de axiomas. La clase de los axiomas es una clase de fbfs definidas del modo siguiente:

(1) Si 'A', 'B' y 'C' son fbfs, y si 'u' es una variable para individuos, entonces las siguientes fbfs son axiomas:
  (1a) '$A \supset [B \supset A]$';
  (1b) '$[A \supset [B \supset C]] \supset [[A \supset B] \supset [A \supset C]]$';
  (1c) '$[A . B] \supset A$';

(1d) $\ulcorner[A.B]\supset B\urcorner$;
(1e) $\ulcorner A\supset[B\supset[A.B]]\urcorner$;
(1f) $\ulcorner A\supset[A\vee B]\urcorner$;
(1g) $\ulcorner B\supset[A\vee B]\urcorner$;
(1h) $\ulcorner[A\supset C]\supset[[B\supset C]\supset[[A\vee B]\supset C]]\urcorner$;
(1i) $\ulcorner[A\supset\sim A]\supset A\urcorner$;
(1j) $\ulcorner\sim A\supset[A\supset B]\urcorner$;
(1k) $\ulcorner A\vee\sim A\urcorner$;
(1l) $\ulcorner(u)A\supset B\urcorner$, donde se satisfacen las siguientes condiciones para alguna variable $\ulcorner v\urcorner$ para individuos: Ninguna ocurrencia libre de $\ulcorner v\urcorner$ en $\ulcorner A\urcorner$ es parte de una fbf de la forma $\ulcorner(u)C\urcorner$ o $\ulcorner(\exists u)C\urcorner$ en $\ulcorner A\urcorner$, y el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de $\ulcorner u\urcorner$ en $\ulcorner A\urcorner$ por ocurrencias de $\ulcorner v\urcorner$ es la fbf $\ulcorner B\urcorner$;
(1m) $\ulcorner(u)[A\supset B]\supset[(u)A\supset(u)B]\urcorner$;
(1n) $\ulcorner A\supset(u)A\urcorner$, donde $\ulcorner u\urcorner$ no es libre en $\ulcorner A\urcorner$;
(1o) $\ulcorner B\supset(\exists u)A\urcorner$, donde se satisfacen las condiciones de (1l);
(1p) $\ulcorner(u)[A\supset B]\supset[(\exists u)A\supset(\exists u)B]\urcorner$;
(1q) $\ulcorner(\exists u)A\supset A\urcorner$, donde $\ulcorner u\urcorner$ no es libre en $\ulcorner A\urcorner$.

(2) Si $\ulcorner A\urcorner$ es un axioma y si $\ulcorner u\urcorner$ es una variable para individuos, entonces $\ulcorner(u)A\urcorner$ es un axioma.
(3) $\ulcorner A\urcorner$ es un axioma sólo si el hecho de serlo se sigue de (1) y (2).

23.5. La clase de los teoremas es una clase de fbfs que se define del modo siguiente:

(1) Todo axioma es un teorema.
(2) Si $\ulcorner A\urcorner$ y $\ulcorner B\urcorner$ son fbfs tales que $\ulcorner A\urcorner$ y $\ulcorner A\supset B\urcorner$ son teoremas, entonces $\ulcorner B\urcorner$ es un teorema.
(3) $\ulcorner A\urcorner$ es un teorema si el hecho de serlo se sigue de (1) y (2).

23.6. Ejemplos de axiomas:

$$P_2\supset[P_3\supset P_2],$$
$$F_1^1(x_1)\supset[F_2^1(x_3)\supset F_1^1(x_1)],$$
$$(x_1)[F_1^1(x_1)\supset[F_2^1(x_3)\supset F_1^1(x_1)]],$$
$$(x_2)F_1^2(x_2,x_3)\supset F_1^2(x_1,x_3),$$
$$(x_3)[(x_2)F_1^2(x_2,x_3)\supset F_1^2(x_1,x_3)],$$
$$[P_1.F_1^1(x_1)]\supset P_1,$$
$$(x_1)[[P_1.F_1^1(x_1)]\supset P_1],$$
$$[[P_1.F_1^1(x_1)]\supset P_1]\supset[P_3\supset[[P_1.F_1^1(x_1)]\supset P_1]],$$

$$(x_1)[[[P_1 . F_1^1(x_1)] \supset P_1] \supset [P_3 \supset [[P_1 . F_1^1(x_1)] \supset P_1]]],$$
$$(x_1)[[[P_1 . F_1^1(x_1)] \supset P_1] \supset [P_3 \supset [[P_1 . F_1^1(x_1)] \supset P_1]]] \supset$$
$$[(x_1)[[P_1 . F_1^1(x_1)] \supset P_1] \supset (x_1)[P_3 \supset [[P_1 . F_1^1(x_1)] \supset P_1]]].$$

23.7. Ejemplos de teoremas que se siguen de los axiomas anteriores:

$$P_3 \supset [[P_1 . F_1^1(x_1)] \supset P_1],$$
$$(x_1)[[P_1 . F_1^1(x_1)] \supset P_1] \supset (x_1)[P_3 \supset [[P_1 . F_1^1(x_1)] \supset P_1]],$$
$$(x_1)[P_3 \supset [[P_1 . F_1^1(x_1)] \supset P_1]].$$

23.8. Puede demostrarse que si ⌜A⌝ es un teorema y ⌜u⌝ es una variable para individuos, entonces ⌜$(u)A$⌝ es un teorema (por ejemplo, ver Fitch XIV 261). Como ejemplo de esto, sea ⌜A⌝ el primer ejemplo de 23.7 y sea ⌜$(u)A$⌝ el tercer ejemplo.

24. Los cuantificadores en la lógica no clásica

24.1. Pueden construirse cálculos funcionales —y en particular los cálculos funcionales de primer orden— que son extensiones de los distintos cálculos proposicionales no clásicos. Algunos de estos cálculos funcionales se han investigado extensamente. Se usan los mismos cuantificadores que en la lógica funcional clásica, pero el significado de estos cuantificadores no es nunca precisamente el mismo que en lógica clásica. Esto se aclara, aun sin inspeccionar detalladamente los sistemas de axiomas, si consideramos la interpretación de la cuantificación universal como una conjunción infinita y la cuantificación existencial como una disyunción infinita (21.2). En lógica polivalente, las conjunciones y disyunciones deben interpretarse como se ha explicado previamente (13.2).

24.2. Se ha señalado que una disyunción puede probarse en lógica intuicionista sólo si al menos uno de sus miembros puede probarse. De hecho, para probar una disyunción, es necesario saber *cuál* de sus disyuntos puede probarse. De modo similar, en lógica intuicionista, una sentencia existencial ⌜$(\exists x)$ $(\ldots x \ldots)$⌝ puede probarse sólo si puede probarse alguna sentencia de la forma ⌜$(\ldots a \ldots)$⌝ para un particular ⌜a⌝; y para probar una sentencia existencial, es necesario poder especificar este ⌜a⌝. Esta similitud entre la disyunción y las sentencias existenciales está relacionada con el hecho de que la cuantificación existencial puede considerarse como una disyunción infinta (21.2).

24.3. Un ejemplo de un cálculo funcional de primer orden *intuicionista* puede obtenerse eliminando los axiomas de la forma $\ulcorner A \vee \sim A \urcorner$ ((1k) de 23.4) del ejemplo de un cálculo funcional de primer orden descrito en la sección 23. En el sistema resultante no es posible probar toda fbf de la forma $\ulcorner A \vee \sim A \urcorner$, por lo que puede decirse que el sistema carece del principio de tercio excluso. Sin embargo, si $\ulcorner A \urcorner$ puede probarse, también puede probarse $\ulcorner A \vee \sim A \urcorner$, y si puede probarse $\ulcorner \sim A \urcorner$ también puede probarse $\ulcorner A \vee \sim A \urcorner$. Este sistema es equivalente al sistema descrito por Heyting en 3852 y 3853.

24.4. Un ejemplo de un cálculo funcional *modal* de primer orden es obtenible ampliando el ejemplo dado en la sección 23 del modo siguiente:

(1) Al definir la clase de las fbfs añadimos la condición de que si $\ulcorner A \urcorner$ es una fbf, también lo son $\ulcorner \Box A \urcorner$ y $\ulcorner \Diamond A \urcorner$.

(2) Modificar apropiadamente la cláusula (6) de 23.2.

(3) Al definir la clase de los axiomas añadimos la condición de que si $\ulcorner A \urcorner$ y $\ulcorner B \urcorner$ son fbfs, y si $\ulcorner u \urcorner$ es una variable para individuos, entonces las fbfs siguientes son axiomas:

(3a) $\ulcorner \Box A \supset A \urcorner$,
(3b) $\ulcorner \Box [A \supset B] \supset [\Box A \supset \Box B] \urcorner$,
(3c) $\ulcorner A \supset \Diamond A \urcorner$,
(3d) $\ulcorner \Box [A \supset B] \supset [\Diamond A \supset \Diamond B] \urcorner$,
(3e) $\ulcorner \Box \sim A \supset \sim \Diamond A \urcorner$,
(3f) $\ulcorner \sim \Diamond A \supset \Box \sim A \urcorner$,
(3g) $\ulcorner (u) \Box A \supset \Box (u) A \urcorner$,
(3h) $\ulcorner \Diamond (\exists u) A \supset (\exists u) \Diamond A \urcorner$.

(4) Al definir la clase de los axiomas, añadimos también la condición de que si $\ulcorner A \urcorner$ es un axioma, también lo es $\ulcorner \Box A \urcorner$.

(5) Modificar apropiadamente la cláusula (3) de 23.4.

24.5. En el anterior cálculo funcional modal de primer orden puede mostrarse que si $\ulcorner A \urcorner$ es un teorema, también lo es $\ulcorner \Box A \urcorner$. Si se omiten todos los axiomas de cuantificadores el sistema resulta equivalente al sistema M de Von Wright (cp. 14.53). Si se omite el axioma de tercio excluso ((1k) de 23.4), el sistema se convierte en un cálculo funcional modal de primer orden intuicionista. El axioma (3h) se denomina a veces "fórmula de Barcan" (XI 96).

25. Cálculo funcional de primer orden con identidad

25.1. El cálculo funcional de primer orden puede ampliarse añadiendo a los símbolos de funciones una constante especial para la función de dos argumentos denominada *identidad*. Así podríamos incluir entre las fbfs fórmulas tales como '$I(x, y)$' ([Ch] 282) y '$x = y$'. (Ver 08.9 con respecto a 'I'.)

25.2. Las propiedades intuitivas de la identidad están incorporadas en los dos principios siguientes:

(a) Todo individuo es idéntico a sí mismo.

(b) Si dos individuos son idénticos (y por tanto no son "dos" realmente), entonces cada propiedad que tenga uno de ellos, la tiene el otro.

25.3. Con el fin de ampliar el cálculo funcional de primer orden hasta incluir la identidad como una función que tiene las propiedades anteriores, añadimos al conjunto de axiomas todas las fórmulas de la forma '$u = u$', donde 'u' es una variable para individuos, y todas las fórmulas de la forma '$[u = v] \supset [A \supset B]$', donde '$u$' y '$v$' son variables para individuos, y la fórmula 'B' es obtenible a partir de la fórmula 'A' reemplazando una o más ocurrencias de 'u' que están libres en 'A' por ocurrencias de 'v' de tal modo que las últimas ocurrencias de 'v' están libres en 'B'. Un ejemplo de una fórmula de este tipo es la siguiente:

$$[x_1 = x_2] \supset [[x_1 = x_1] \supset [x_2 = x_1]].$$

26. Descripciones definidas

26.1. Hablando de modo general, una *descripción definida* es una frase o el equivalente simbólico de una frase que empieza por el artículo definido 'el', con tal que la frase pueda construirse en la forma de 'el (único) x tal que...'. (Aquí los tres puntos representan algún enunciado acerca de x.)

26.2. 'El (único) x tal que' se representa por medio del operador '$(\imath x)$' en [PM] (* 14.01), por 'ι_x' en [HB] (i 383), y por 'ι_x' en [R] (182).

26.3. Cualquier afirmación que contenga la frase 'el x tal que ϕx' parece presuponer que hay un único x tal que ϕx, es decir, que hay un x tal

que ϕx y solamente hay un x tal. Esta presuposición de existencia única se expresa mediante '$E!(\imath x)\phi x$' en [PM] (*14.02) y por '$\exists !x\phi x$' en [K] (199). Más específicamente, en [PM] * 14.02 la expresión '$E!(\imath x)\phi x$' se considera como una abreviación de '$(\exists y)(x)[\phi x \equiv [x = y]]$'. (Véase también 26.7).

26.4. Diferentes autores siguen convenciones distintas con respecto al significado exacto que debe atribuirse a '$(\imath x)\phi x$'.

26.41. Según [HB] (i 384) '$(\imath x)\phi x$' puede considerarse como el nombre de un individuo si y sólo si hay un x y solamente uno tal que ϕx.

26.42. Según Frege, [Ch] (41), y otros, deben considerarse dos casos. Si hay exactamente un x tal que ϕx, entonces '$(\imath x)\phi x$' denota a ese x. Si no, '$(\imath x)\phi x$' tiene alguna denotación artificial, por ejemplo, la clase nula.

26.43. [PM] (* 14) da una definición contextual de '$(\imath x)\phi x$' definiendo el resultado de colocar '$(\imath x)\phi x$' en un contexto. Según esta definición, '$(\ldots(\imath x)\phi x\ldots)$' se define como '$(\exists y)[(x)[\phi x \equiv [x = y]] \cdot (\ldots y\ldots)]$'. En otras palabras, decir "Esto y lo otro es verdad del objeto que tiene tal y cual propiedad", es decir "un objeto y sólo uno tiene tal y cual propiedad, y esto y lo otro es verdad de este objeto".

26.5. Puede haber cierta ambigüedad con respecto a la extensión del contexto que se considera, porque si '$(\imath x)\phi x$' aparece dentro de un contexto suficientemente grande, aparece también, al mismo tiempo, dentro de contextos menores que son parte del contexto mayor. Esta ambigüedad puede resolverse mediante una convención que requiere que el contexto se elija lo más pequeño posible, o requiere que el contexto se elija lo más grande posible, o que indica explícitamente la extensión del contexto. Por ejemplo, considérese '$\sim G((\imath x)F(x))$'. Si el contexto de la descripción definida se elige lo más pequeño posible, entonces '$\sim G((\imath x)F(x))$' se define como '$\sim(\exists y)[(x)[F(x) \equiv [x = y]] \cdot G(y)]$'. Pero si el contexto de la descripción definida se elige lo más grande posible, entonces '$\sim G((\imath x)F(x))$' se define como '$(\exists y)[(x)[F(x) \equiv [x = y]] \cdot \sim G(y)]$'. A veces se usa un tipo especial de operador '$[(\imath x)\phi x]$' para indicar la extensión del contexto de una descripción definida y se coloca al principio del contexto. Por ejemplo '$\sim G((\imath x)F(x))$' se escribe como '$[(\imath x)F(x)] \sim G((\imath x)F(x))$' si el contexto de la descripción definida se toma como lo más grande posible, mientras que '$\sim G((\imath x)F(x))$' se escribe como '$\sim[(\imath x)F(x)]G((\imath x)F(x))$' si el contexto se toma como lo más pequeño po-

sible. La extensión propuesta del contexto se denomina con frecuencia *alcance* de la descripción definida '$(\imath x)\phi x$'. Una notación más económica es escribir '$^{x}\sim G((\imath x)F(x))$' en lugar de '$[(\imath x)F(x)] \sim G((\imath x)F(x))$', y escribir '$\sim^{x}G((\imath x)F(x))$' en lugar de '$\sim [(\imath x)F(x)]G((\imath x)F(x))$', suponiendo que las diferentes variables están asociadas a descripciones definidas diferentes. En el sistema de [PM] la extensión del alcance no produce ninguna diferencia si '$\mathrm{E}!(\imath x)\phi x$' puede probarse. En tal caso la descripción definida actúa en efecto como un nombre del objeto descrito. En lógica modal cuantificada se requiere con este fin un criterio más complicado que '$\mathrm{E}!(\imath x)\phi x$'.

26.6. En [PM] cuando no se indica el alcance debe elegirse lo más pequeño posible (compatible con no reemplazar los símbolos definidos por sus símbolos definidores). Así '$(\imath x)\phi x \neq (\imath x)\phi x$' abrevia a '$(\exists y)\,[(x)[\phi x \equiv [x = y]] \cdot [y \neq y]]$', mientras que '$\sim [(\imath x)\phi x = (\imath x)\phi x]$' abrevia a '$\sim (\exists y)\,[(x)[\phi x \equiv [x = y]] \cdot [y = y]]$'.

26.7. Aunque en [PM] '$\mathrm{E}!a$' carece de significado si 'a' no es una descripción definida, esta limitación podría evitarse considerado '$\mathrm{E}!a$' como una abreviación de '$[a = a]$'. Entonces '$\mathrm{E}!(\imath x)\phi x$' sería una abreviación de '$[(\imath x)\phi x = (\imath x)\phi x]$', y éste, a su vez, por 26.43, sería una abreviación de '$(\exists y)[(x)[\phi x \equiv [x = y]] \cdot [y = y]]$', que en el sistema de [PM] es lógicamente equivalente a '$(\exists y).(x)[\phi x \equiv [x = y]]$', coincidiendo por tanto con la definición de [PM] de '$\mathrm{E}!(\imath x)\phi x$' ya enunciada en 26.3. Por tanto la última definición se convierte en superflua y el tratamiento de las descripciones definidas llega a ser más uniforme.

27. Descripciones cuasi-definidas

27.1. Así como '$(\imath x)\phi x$' puede tomarse para significar lo mismo que 'el x tal que ϕx', del mismo modo '$\eta_x \phi x$' es una notación formal usada por [HB] (ii 10, 11) para significar lo mismo que 'un x tal que ϕx'. Se supone que si '$(\exists x)\phi x$' es una fórmula que puede probarse, entonces '$\eta_x \phi x$' es una constante y '$\phi(\eta_x \phi x)$' es una fórmula que puede probarse. '$\eta_x \phi x$' puede llamarse *descripción cuasi-definida,* así como '$(\imath x)\phi x$' se denomina descripción definida. Así, por ejemplo, si '$(\exists x)[F(x) \cdot H(x)]$' es una fórmula que puede probarse, entonces se supone que la fórmula '$F(\eta_x[F(x) \cdot H(x)]) \cdot H(\eta_x[F(x) \cdot H(x)])$' puede probarse también.

27.2. La expresión '$\varepsilon_x \phi x$' se define como una abreviación de '$\eta_x[(\exists y)\phi y \supset \supset \phi x]$'. Entonces ya que '$(\exists x)[(\exists y)\phi y \supset \phi x]$' puede probarse, también puede probarse '$(\exists y)\phi y \supset \phi(\varepsilon_x \phi x)$', y '$\varepsilon_x \phi x$' es una constante. Pero '$\phi(\varepsilon_x \phi x) \supset (\exists y)\phi y$' también puede probarse (cp. 23.4 (10)), por lo que puede probarse '$(\exists y)\phi y \equiv \phi(\eta_x \phi x)$'. Por otra parte, en general '$(\exists y)\phi y \equiv \phi(\eta_x \phi x)$' no puede probarse.

27.3. Ya que '$\varepsilon_x \phi x$' se considera como una constante cuando 'ϕx' no contiene variables libres distintas a 'x', es evidente que el uso de esta notación en el modo descrito implica suponer que cuando hay varios valores de 'x' para los que 'ϕx' es verdadera, siempre puede hacerse (uniformemente) la elección de un valor único. Y realmente, si permitimos que 'x' no sea simplemente una variable individual como en [HB] sino una variable de cualquier tipo (en el sentido del capítulo siguiente), entonces '$(\exists y)F(y) \supset F(\varepsilon_x F(x))$', donde '$y$' es una variable del mismo tipo que 'x', y 'F' es una variable del tipo adecuado, es un modo de enunciar lo que se denomina *axioma* (o axioma esquema) *de elección.* (Compárese con los axiomas 11^{α} de Church V 114).

27.4. Puede demostrarse que la fórmula '$(y)\phi y \equiv \phi(\varepsilon_x \sim \phi x)$' puede probarse por el mismo método general usado para probar '$(\exists y)\phi y \equiv \phi(\varepsilon_x \phi x)$'.

CAPITULO 3

CALCULOS FUNCIONALES DE ORDEN SUPERIOR. LA TEORIA DE TIPOS

30. Ordenes de cálculos

30.1. Hay muchos enunciados lógicos de un tipo bastante elemental que no pueden formalizarse adecuadamente dentro del cálculo funcional de primer orden (a menos que se permitan variables para individuos que se refieran tanto a propiedades como a individuos (cp. 20.2)). Así, por ejemplo, es el enunciado de que dos propiedades (de individuos) cualesquiera tienen una intersección; es decir, que para cualesquiera dos propiedades F y G hay una propiedad H tal que $H(x)$ es verdadera precisamente para aquellos objetos x para los que son verdaderas $F(x)$ y $G(x)$. Usando las notaciones '(F)' y '$(\exists F)$' para 'para todas las propiedades F' y 'hay una propiedad F' respectivamente, donde 'F', 'G' y 'H' son variables de propiedades de individuos, llegamos a la formulación siguiente:

$$'(F)(G)(\exists H)(x)[H(x) \equiv [F(x) . G(x)]]'.$$

30.2. El cálculo que es precisamente como el cálculo funcional de primer orden, excepto en que las variables para las funciones proposicionales de individuos pueden ser ligadas por cuantificadores, se denomina *cálculo funcional de segundo orden.* Así como la fórmula siguiente puede probarse en el cálculo funcional de primer orden:

$$'(x)F(x) \supset F(y)'$$

('Lo que es verdadero de todos los individuos es verdadero de cualquier individuo y'), también puede probarse en el cálculo funcional de segundo orden toda fórmula de la siguiente forma:

$$'(F)F(x) \supset G(x)'$$

('Si un individuo tiene todas las propedades entonces ese individuo tiene cualquier propiedad G'). De modo similar para las funciones de más de un argumento. Sin embargo, si 'P' es una variable, la fórmula

$$'(F)P(F) \supset P(G)'$$

('Lo que es verdadero de todas las funciones de individuos es verdadero de cualquier función de individuos G') no puede probarse en el cálculo funcional de segundo orden, ya que este cálculo no utiliza ninguna variable libre 'P' como funciones proposicionales de un argumento de funciones proposicionales de individuos, es decir, como propiedades de propiedades de individuos.

30.3. De este modo llegamos a construir el *cálculo funcional de tercer orden,* que contiene todas las variables libres y ligadas del cálculo de segundo orden, y además, variables libres para funciones de funciones de individuos. Estas variables funcionales adicionales podrían ser de muchos tipos, dependiendo del número de argumentos de las funciones a las que se refieren y del tipo de argumentos de esas funciones (por ejemplo, si un argumento dado es una función de un argumento, de dos argumentos, y así sucesivamente). (Para ulteriores detalles, véase Church X 19, páginas 104-105.)

30.4. En el cálculo de cuarto orden, se admiten cuantificadores que afectan a las variables funcionales nuevamente introducidas en el cálculo de tercer orden. Y así sucesivamente para cada orden superior del cálculo funcional. Cada cálculo de orden impar, $2n + 1$, introduce variables funcionales de un nuevo tipo, y cada cálculo de un orden par, $2n + 2$, introduce cuantificadores que afectan a las variables introducidas anteriormente en el cálculo de orden $2n + 1$.

30.5. El cálculo funcional F^{ω} de orden ω se obtiene combinando todos los cálculos funcionales de orden finito.

30.6. En un cálculo funcional de segundo orden F^2, existe, como un subcálculo, un cálculo funcional "simple" de segundo orden $F^{2,1}$, y también un cálculo funcional "binario" de segundo orden $F^{2,2}$, y así sucesivamente,

tales que todas las funciones del cálculo funcional simple son funciones de un argumento, todas las funciones del cálculo funcional binario son funciones de dos argumentos, y así sucesivamente. En un cálculo funcional de n-esimo orden F^n hay un cálculo funcional simple de n-esimo orden $F^{n,1}$, un cálculo funcional binario de n-esimo orden $F^{n,2}$, y así sucesivamente. En particular, hay un cálculo simple $F^{\omega,1}$, de orden ω, que combina los cálculos $F^{1,1}$, $F^{2,1}$, $F^{3,1}$, y así sucesivamente.

30.7. Los cálculos funcionales de primer orden y de orden superior pueden incluir tanto constantes como variables. Para cada tipo de variables puede haber un tipo correspondiente de constantes. Del mismo modo que tenemos funciones de un argumento, de dos argumentos, y así sucesivamente, podemos también considerar las proposiciones como funciones de cero argumentos, de modo que las variables que se refieran a las funciones de cero argumentos pueden servir entonces como variables proposicionales. Estas funciones de cero argumentos pueden considerarse por conveniencia como funciones de individuos.

30.8. En F^2 es posible definir la identidad entre individuos al modo leibniziano: así '$x = y$' puede definirse como '$(F)[F(x) \supset F(y)]$', hasta cierto punto como se hace en [PM] *13.01 (cp. 25.1). Y de modo similar para la identidad de funciones de individuos en F^4, y así sucesivamente.

31. La teoría de tipos

31.1. La distinción entre órdenes de cálculos funcionales está íntimamente relacionada con la distinción entre *tipos* de constantes y variables funcionales. Aquí nos interesan los problemas de notación surgidos de la teoría de tipos, y no necesitamos tratar sobre su origen ni sobre su superfluidad o necesidad.

31.2. Según la teoría de tipos, cada variable y constante pertenece a cierta categoría fija llamada *tipo*. Según esta teoría, una fórmula no está bien formada a menos que cada una de sus expresiones, que denota una función, sea del tipo apropiado, en cuanto determinado por los tipos de las expresiones que denotan argumentos de esa función y los tipos de las expresiones que denotan sus valores. Por "expresión funcional" o "símbolo funcional" entenderemos un símbolo o expresión que denota una función (o que denotaría una función si todas las variables libres se reemplazarán en él por constantes adecuadas). El tipo de una expresión funcional depende de (y es siempre diferente de) los tipos de sus símbolos argumen-

tales. En la *teoría simple de tipos* este tipo depende *únicamente* de los tipos de los símbolos argumentales y del tipo de los símbolos de los valores (símbolos para los valores de la función). Así en el caso de una función de n argumentos, si se han especificado totalmente los tipos respectivos de los símbolos n-argumentales, así como el tipo de los símbolos de los valores, entonces se ha especificado totalmente el tipo de la expresión funcional (cp. 32). En la *teoría de tipos ramificada,* la especificación del tipo depende de la naturaleza de la expresión funcional misma, así como de los tipos de los símbolos argumentales y en algunos casos también de los tipos de los símbolos de valores (cp. 31.3). El cálculo funcional basado en la teoría de tipos simple, es, en efecto, el mismo que el cálculo funcional F^{ω} de orden ω. La noción de tipo, en un sentido ligeramente diferente, puede aplicarse a las funciones mismas. Así, si una expresión funcional es de un tipo, decimos que la función denotada por esa expresión funcional es también (en un sentido diferente) de ese tipo.

31.3. La *teoría de tipos ramificada* difiere de la teoría de tipos simple en aspectos importantes ([PM] Capítulo II de la Introducción a la Primera Edición). Para formular la teoría de tipos ramificada es conveniente asignar tipos no sólo a las variables y constantes, sino también a las distintas expresiones funcionales complejas. Aquí sólo consideraremos el caso en que las expresiones funcionales denotan funciones proposicionales. Se introduce el concepto de "orden" de un tipo. Este es un modo ulterior de distinguir tipos, según la distinción hecha en la teoría de tipos simple. Los distintos órdenes se expresan numéricamente como 0, 1, 2, 3, ... El tipo de una expresión funcional (y en particular el *orden* de ese tipo) se hace depender no sólo de los tipos de sus símbolos argumentales (y su orden debe ser mayor que los órdenes de los tipos de tales símbolos argumentales), sino también de los tipos de las variables y constantes que aparecen en la expresión funcional. El orden del tipo de una expresión funcional es el mínimo orden mayor que el orden del tipo de cualquier variable que ocurra ligada en ella, y no menor que el orden del tipo de cualquier variable que ocurra libre en ella o de cualquier constante que ocurra en ella; cp. Fitch IV 97. Así, en la teoría de tipos ramificada, en el caso de un función proposicional de n argumentos, si se han especificado los tipos respectivos de los símbolos n-argumentales y si se ha especificado el orden de la expresión funcional, entonces se ha especificado de hecho el tipo de la expresión funcional. Para aclarar más esto, consideremos el ejemplo siguiente: Napoleón tenía dos propiedades, entre otras: la propiedad de ser un emperador, y la propiedad de tener todas

las propiedades requeridas para ser un gran general. Ambas son propiedades de individuos. Por tanto, se expresan mediante predicados del mismo tipo en la teoría de tipos simple. Pero la teoría de tipos ramificada distingue entre los órdenes de los tipos de estos dos predicados porque uno de ellos incluye un cuantificador que contiene una variable de un tipo del mismo orden que el tipo del otro predicado. Así en la terminología de la teoría de tipos ramificada, las dos propiedades serían, más específicamente, la propiedad de primer orden de ser un emperador y la propiedad de segundo orden de tener todas las propiedades de primer orden requeridas para ser un gran general. (Por una propiedad de *n*-esimo orden se entiende una propiedad cuyo tipo es de orden *n*.) Aunque los tipos de estas dos propiedades son tipos de propiedades de individuos, sin embargo son tipos diferentes, ya que uno es un tipo de primer orden y el otro es un tipo de segundo orden.

31.4. También se han propuesto teorías totalmente libres de tipos, como por ejemplo en [F]. Otros ([Q] 155, [R] 205) usan reglas de "estratificación" que no atribuyen un tipo establecido a cada variable y constante.

32. Indicación explícita de tipo

32.1. Con frecuencia es deseable indicar explícitamente el tipo de una variable o constante. Con este fin se usan distintas notaciones.

32.2. La notación de Church para la teoría de tipos simple (cp. Church V 114) consiste en suscritos añadidos a cada variable o constante; también pueden ser suscritos relativos a las conectivas (32.26). Los suscritos pueden servir como nombres de los tipos en las explicaciones.

32.21. El tipo de una sentencia o de una variable proposicional se indica mediante omicron '*o*'; el tipo de una constante que denota un individuo o una variable para individuos se indica mediante iota, '*ι*'.

32.22. Si '*a*' y '*b*' indican tipos, entonces '(*ab*)' indica el tipo de una expresión funcional (de un argumento) cuyos símbolos argumentales tienen el tipo indicado por '*b*' y cuyos valores se expresan por símbolos del tipo indicado por '*a*'. (Podemos escribir '*ab*' en vez de '(*ab*)' cuando no resulte ambigüedad alguna de hacerlo así.) Por tanto, $o\iota$ es el tipo de una variable para una función proposicional de individuos, y $o\,(o\iota)$

es el tipo de una variable para una función proposicional de funciones proposicionales de individuos.

32.23. Este mismo método puede elaborarse posteriormente para tratar funciones de más de un argumento. Si 'a', 'b' y 'c' indican tipos, entonces '(abc)' indican el tipo de una función de dos argumentos cuyos respectivos símbolos argumentales tienen los tipos indicados por 'b' y 'c', y cuyos valores se expresan por los símbolos del tipo indicado por 'a'. (Podemos escribir 'abc' en vez de '(abc)' cuando de hacerlo así no resulte ambigüedad alguna.) Por ejemplo, una función proposicional de individuos de dos argumentos se dice que es del tipo $o\iota\iota$. Una función proposicional de dos argumentos de funciones proposicionales para individuos de dos argumentos sería del tipo $o(o\iota)(o\iota)$. Si 'a', 'b', 'c' y 'd' indican tipos, entonces '$(abcd)$' indica el tipo de una función de tres argumentos cuyos respectivos símbolos argumentales tienen los tipos indicados por 'b', 'c' y 'd', y cuyos valores se expresan por los símbolos del tipo indicado por 'a'. Por ejemplo, una función proposicional de individuos de tres argumentos sería del tipo $o\iota\iota\iota$. Puede usarse un procedimiento similar para funciones de cuatro o más argumentos. Obsérvese que una especificación del tipo de una función implica (y, conversamente, es implicada por) una especificación de los tipos de los argumentos respectivos de la función y de los valores de la función. Es una regla de la teoría de tipos simple que las fórmulas atómicas sean de la forma 'p_o', '$x_{oa}(y_a)$', '$x_{oab}(y_a, z_b)$', y así sucesivamente, donde 'p_o', 'y_a', 'x_{oa}', 'x_{oab}', 'z_b' son constantes o variables del tipo indicado por los suscritos.

32.24. El término 'tipo' es ambiguo en el sentido de que puede aplicarse al símbolo de una función o individuo o a la función o individuo mismo, pero estos dos significados de 'tipo' son paralelos y distintos, y en la práctica esta ambigüedad causa poca dificultad.

32.25. En relación con el uso del operador λ (06.2, 40.2 ff.) debería notarse que si una forma asociada '$(\ldots x\ldots)$' de una función es del tipo a y si la variable 'x' en la forma es del tipo b, entonces '$\lambda x(\ldots x\ldots)$', que denota la función y que es el resultado de aplicar el operador 'λx' a '$(\ldots x\ldots)$', es del tipo ab. Por tanto la función denotada por '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' es del tipo ab, usando el término 'tipo', ahora, aplicado a la función misma en vez de a la expresión que denota la función (cp. 32.24). De modo similar si '$(\ldots x\ldots y\ldots)$' es del tipo a y si 'x' e 'y' son variables de los tipos 'b' y 'c' respectivamente, entonces '$\lambda x\lambda y(\ldots x\ldots y\ldots)$' puede considerarse que es del tipo abc. Debería prestarse una atención especial a la situa-

ción resultante de definir el doble operador λ por medio de dos usos del operador λ simple (ordinario), de modo que '$\lambda x \lambda y(\ldots x \ldots y \ldots)$' se define como '$\lambda x(\lambda y(\ldots x \ldots y \ldots))$', como se acostumbra en lógica combinatoria (41.3, 44.5). En este caso, si 'x' e 'y', y '$(\ldots x \ldots y \ldots)$' son respectivamente de los tipos *b, c* y *a,* entonces '$\lambda y(\ldots x \ldots y \ldots)$' es del tipo *ac,* y por tanto '$\lambda x(\lambda y(\ldots x \ldots \ldots y \ldots))$' es del tipo *(ab)c,* por lo que '$\lambda x \lambda y(\ldots x \ldots y \ldots)$' sería del tipo *(ac)b,* en lugar de *abc.* Pero esta disparidad no causa ninguna dificultad en lógica combinatoria porque el tipo *abc* puede definirse como el tipo *(ac)b,* e incluso podríamos considerar la notación indicadora de tipos '*abc*' como una abreviación de la notación indicadora de tipos '*(ac)b*'. Por otra parte, Church (V 114) considera la notación indicadora de tipos '*acb*' como una abreviación de la notación indicadora de tipos '*(ac)b*', de modo que, según la notación de Church, el tipo de '$\lambda x \lambda y(\ldots x \ldots y \ldots)$' se indicaría por '*acb*' en vez de por '*abc*'. Consideraciones similares se aplican a los operadores λ triples, cuádruples y así sucesivamente.

32.26. A veces es útil asignar tipo a conectivas tales como '$\sim$', '$\vee$', '$\cdot$', '$\supset$' (06.1). Ya que '$\sim$' es, en efecto, un operador que se aplica a expresiones del tipo *o* para obtener como resultado expresiones del tipo *o* también, el tipo de '$\sim$' sería *oo.* De modo similar los tipos de '$\vee$', '$\cdot$', y '$\supset$' serían *ooo.* Los cuantificadores (06.3) son como '$\sim$' en el sentido de que se aplican a expresiones del tipo *o* para obtener como resultado expresiones del tipo *o* también; por lo que los cuantificadores también serían del tipo *oo.* (Si los cuantificadores se definen en términos de operadores 'Π' y 'Σ', como se ha indicado en 40.8, los cuantificadores aún serían del tipo *oo,* pero 'Π' y 'Σ' serían del tipo *o(oa),* donde *a* es el tipo de la variable afectada por los cuantificadores.) El tipo puede asignarse a cualquier operador monádico que se restringe a operandos de un tipo especificado y que da como resultado expresiones sólo de un tipo especificado. De modo similar los tipos pueden asignarse a cualquier operador *n*-adico que esté de tal modo restringido que se especifique un tipo para cada uno de sus *n* operandos, y también un tipo para el resultado de su aplicación a los operandos. Si se requiere que los tipos respectivos de los *n* operandos sean los tipos $b_1, b_2, \ldots, b_n$, y si el tipo del resultado de aplicar el operador es *a,* entonces el tipo del operador sería $ab_1b_2 \ldots b_n$. Unicamente el operador λ 'λx' es restringido en el modo apropiado, no puede asignársele tipo. Si se hace la restricción, tenemos distintos operadores λ restringidos en modos diferentes y con diferentes tipos. (Cp. Church, V 114.) (Si 'λ' mismo se considera como un operador diádico que puede aplicarse a 'x' y a '$(\ldots x \ldots)$' para dar '$\lambda x(\ldots x \ldots)$', también

se necesitaría restringir adecuadamente 'λ' con el fin de asignarle tipo, y necesitaríamos distintos operadores, 'λ_a', 'λ_b', y así sucesivamente, de tipos adecuados *a*, *b* y así sucesivamente.)

32.3. Ajdukiewicz tiene una notación comparable a la de Church, usando una función '$\frac{a}{b}$' en vez de la secuencia '*ab*'.

32.4. Carnap usa los numerales '0', '1', '2', ..., en vez de 'ι', '$o\iota$', '$o(o\iota)$', ...,y usa '*ab*' en vez de '*oab*' para representar el tipo de una variable funcional binaria del tipo *oab*.

32.5. [PM] no tiene ninguna notación para designar "absolutamente" un tipo. Sin embargo usa notaciones complicadas para expresar el tipo de una variable relativa al tipo de otra (*12).

32.6. Church (XI 31) ha propuesto sistemas de teoría de tipos que introducen una distinción entre sentido y denotación (02).

33. Indicación implícita de tipo

33.1. En realidad, puede eliminarse con frecuencia la indicación explícita de tipo por medio de suscritos (32.2) ya que en muchas situaciones el tipo se indica suficientemente por el contexto, al menos si ya está especificado el tipo de unos pocos símbolos.

33.2. Por ejemplo, supongamos que consideramos la fórmula bien formada '$x(y) \cdot z(x, y) \cdot t(x)$' donde el tipo de '$y$' ya está especificado y donde la fórmula completa es, naturalmente, del tipo *o*. Si 'y' es del tipo ι entonces 'x', 'z' y 't' deben ser respectivamente de los tipos $o\iota$, $o(o\iota)\iota$, y $o(o\iota)$, mientras que si 'y' es del tipo $o\iota$, entonces deben ser respectivamente de los tipos $o(o\iota)$, $o(o(o\iota))(o\iota)$, y $o(o(o\iota))$.

33.3. A pesar de la economía que puede introducirse por el método de 33.2, sin embargo es muy común usar '*p*', '*q*', '*r*', ..., como variables proposicionales, '*x*', '*y*', '*z*', ..., como variables individuales, y '*F*', '*G*', '*H*', ..., como variables para funciones proposicionales de individuos.

CAPITULO 4

LOGICA COMBINATORIA

40. Aplicación y abstracción

40.1. La lógica combinatoria trata de dos procesos que, en un sentido son inversos entre sí. Uno es el proceso de encontrar el valor de una función, dada la función y un argumento de la función. Este primer proceso corresponde a la *aplicación,* por la cual una función se aplica a un argumento, y el resultado de la aplicación es el valor de la función para ese argumento. Esta noción de aplicación se considera como un concepto primitivo fundamental de lógica combinatoria, así como la suma o multiplicación podrían considerarse como primitivas en álgebra ordinaria.

40.2. El segundo proceso es el proceso de encontrar la función misma, dada la información conveniente acerca de los valores de la función para todos sus argumentos. Este proceso corresponde a la *abstracción,* y en la práctica requiere que tengamos a mano una *forma asociada* de la función (05.4). Así, si '$(\ldots x\ldots)$' es una forma asociada de una función, entonces tenemos la siguiente información sobre los valores de la función para todos sus argumentos: Si 'a' denota cualquier argumento de la función, entonces '$(\ldots a\ldots)$' denota el valor correspondiente de la función. Usando el operador λ (operador lambda) 'λx' que contiene la misma variable 'x' que la forma asociada '$(\ldots x\ldots)$' podemos formar la expresión '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' que puede considerarse que denota la función misma (cp. 06.2).

40.3. Estrictamente hablando, hay dos modos de abstracción, uno relativo a la obtención de un nombre de una función operando con el ope-

rador λ sobre una forma asociada de la función, el otro relativo a la obtención de la función misma partiendo de la información adecuada sobre sus valores para todos sus argumentos. El primer tipo de abstracción puede llamarse abstracción sintáctica y el segundo tipo abstracción real. Estos dos tipos de abstracción son paralelos en el sentido de que la función obtenida por la abstracción real será denotada por un nombre (de una función) obtenido por abstracción sintáctica. (También existe abstracción como la relación semántica de la forma asociada de una función con la función misma. Este tercer significado del término 'abstracción' es el usado por Church ([Ch] 22).)

40.4. De modo similar hay dos tipos de aplicación, una relativa a la obtención del nombre de un valor de la función a partir del nombre de la función y el nombre de un argumento de la función, la otra relativa a la obtención del valor mismo a partir de la función y un argumento de la función. Estos dos tipos de aplicación pueden llamarse *aplicación sintáctica* y *aplicación real* (o simplemente *aplicación*). Son paralelas entre sí del mismo modo que los dos tipos de abstracción son paralelos entre sí. Cuando un operador se "aplica" a un operando, este tipo de aplicación puede considerarse como una noción algo más general de aplicación sintáctica que podemos llamar *aplicación operativa.* En el caso de que el operador no contenga variables ligadoras (06.1), la aplicación de un operador de este tipo puede considerarse como un caso de aplicación sintáctica ordinaria; pero si contiene variables ligadoras, la aplicación del operador es una aplicación operativa en vez de un caso de un tipo más general de aplicación sintáctica. La aplicación sintáctica típica de lógica combinatoria se denomina *combinación* y es siempre la aplicación de un nombre de una función al nombre de un argumento simple. Es el caso de la aplicación sintáctica, en el sentido más estricto. Por otra parte, la aplicación del operador λ es un caso de aplicación operativa pero no de aplicación sintáctica en el sentido más estricto. Todos los sistemas de lógica combinatoria usan la combinación, pero no todos usan el operador λ y la aplicación operativa. (El sistema de Church de conversión λ usa ambas, pero el ejemplo de 42 sólo usa la combinación.)

40.5. En aquellos sistemas de lógica combinatoria que no usan el operador λ, el efecto del operador λ se lleva a cabo indirectamente por el uso de los llamados *combinadores* (43.7) en términos de los cuales es posible definir expresiones de la forma '$[x](\ldots x\ldots)$' (42.6, 45.6). Las últimas expresiones realizan la función desempeñada por las expresiones de la forma

'$\lambda x(\ldots x\ldots)$' en otra parte de la lógica combinatoria. Es posible considerar '$[x]$' como un pseudo-operador que es estrechamente análogo al operador 'λx'. Véase [CF] 189.

40.6. El concepto de abstracción se usa generalmente en lógica simbólica fuera de la lógica combinatoria. Por ejemplo, una función proposicional puede definirse reemplazando una constante 'a' por una variable 'x' en una sentencia '$(\ldots a\ldots)$', de modo que el resultado '$(\ldots x\ldots)$' sería una forma asociada de la función proposicional, y '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' denotaría la función proposicional. Más en particular, si '$\sim f(a)$' expresa una proposición en el sentido de que a no es miembro de f, entonces '$\lambda x(\sim f(x))$' denotaría una función proposicional, que, cuando se aplica a a, tiene como su valor a la proposición $\sim f(a)$. Así la proposición $(\lambda x(\sim f(x)))(a)$ asevera, de hecho, lo mismo que $\sim f(a)$. Debe advertirse que puede considerarse que '$\lambda x(\sim f(x))$' denota el complemento de la clase f (54.2). De modo similar, '$\lambda x[f(x) \cdot g(x)]$' puede considerarse que denota la intersección (54.3) de las clases f y g, y puede considerarse que '$\lambda x \lambda y[r(x, y) \cdot s(x, y)]$' denota la intersección relacional (60.63) de las relaciones r y s.

40.7. Fuera de la lógica combinatoria (51.2, 60.22), es frecuente emplear la notación '$\hat{x}$' en lugar de 'λx' en el caso de funciones proposicionales. Así, en vez de '$\lambda x(\sim f(x))$' se usaría más comunmente '$\hat{x}(\sim f(x))$' para expresar el complemento de f. En general, debe considerarse que '$\hat{x}(\ldots x\ldots)$' denota una función proposicional de un argumento, y por tanto una clase o atributo. De modo similar, '$\hat{x}\hat{y}(\ldots x\ldots y\ldots)$' toma el lugar de '$\lambda x \lambda y$ $(\ldots x\ldots y\ldots)$' y debe considerarse que denota una función proposicional de dos argumentos, y por tanto una relación o relación misma de dos términos (cp. 05.8, 05.9).

40.8. Además, desde el punto de vista de la lógica combinatoria, un enunciado universal, '$(x)(\ldots x\ldots)$' (21.1 ff.), puede considerarse expresable como '$\Pi(\lambda x(\ldots x\ldots))$', donde '$\Pi$' opera sobre el nombre de clase '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' para proporcionar una sentencia que establece que la clase nombrada por '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' es universal (totalmente inclusiva). Así el enunciado, '$(x)[x = x]$' (que significa que cualquier cosa es idéntica a sí misma), puede considerarse equivalente al (o quizá incluso como una abreviación del) enunciado, '$\Pi(\lambda x[x = x])$', que asevera que la clase de los objetos idénticos a sí mismos es totalmente inclusiva (46.2). De modo similar un enunciado existencial, '$(\exists x)(\ldots x\ldots)$', puede considerarse expresable como '$\Sigma(\lambda x(\ldots x\ldots))$', donde '$\Sigma$' opera sobre el nombre de clase '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' para proporcionar una sentencia que asevera que la clase

nombrada por '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' no es vacía. Así el enunciado, '$(\exists x)[x = d]$' (que significa que algo es idéntico a *d*), puede considerarse equivalente al (o quizá incluso como una abreviación del) enunciado, '$\Sigma(\lambda x[x = d])$', que asevera que la clase de los objetos idénticos a *d* no es vacía. (Los operadores 'Π' y 'Σ' corresponden a '**A**' y '**E**' en [F] (128, 145), donde se usan sin las restricciones de una teoría de tipos. Sin embargo, si se usan tipos (31.1 ff.), y si en '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' '$x$' es del tipo *a*, entonces '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' es del tipo *oa*, de modo que si 'Π' y 'Σ' operan sobre expresiones del tipo *oa* para proporcionar expresiones del tipo *o*, deben ser del tipo *o*(*oa*).)

40.9. Una frase descriptiva, '$(\imath x)(\ldots x\ldots)$' (26.1 ff.), podría considerarse expresable, desde el punto de vista de la lógica combinatoria, como '$\imath(\lambda x(\ldots x\ldots))$', donde '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' denota una clase que tiene solamente un miembro y donde '$\imath$' (iota griega invertida) sería un operador que operaría sobre el nombre de clase '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' para proporcionar el nombre del único miembro de la clase denotada por '$\lambda x(\ldots x\ldots)$'. Sin embargo, no parece que se haya introducido sistemáticamente un operador de este tipo en lógica combinatoria.

41. La notación de lógica combinatoria

41.1. En lógica combinatoria el método fundamental de construir expresiones complejas a partir de expresiones simples es el proceso de *combinar* dos expresiones. La combinación de 'a' con 'b' se escribe '(ab)' o simplemente 'ab'. Este tipo de combinación es esencialmente el mismo que el discutido en 40.4. Si 'a' y 'b' son *fbfs* (fórmulas bien formadas) de lógica combinatoria, también lo es 'ab'. Es habitual suponer que ciertas letras mayúsculas tales como 'B', 'C', 'W', 'S', 'K', u otras, son las fbfs atómicas y que todas las expresiones obtenidas a partir de éstas repitiendo el proceso de combinación son también fbfs. (En la práctica se usan habitualmente las letras itálicas en vez de las letras mayúsculas latinas.) Por ejemplo, si 'B' y 'C' se consideran como fbfs atómicas, entonces 'B', 'C', 'BB', 'B(BB)', 'CB', '(CB)C', '((CC)C)B', y así sucesivamente serían fbfs. Es una convención de lógica combinatoria el que podamos escribir 'abc' en vez de '$(ab)c$' y '$abcd$' en vez de '$((ab)c)d$', y así sucesivamente. Por ejemplo, podemos escribir 'CBC' en vez de '(CB)C' y podemos escribir 'CCCB' en vez de '((CC)C)B'. Además, podemos escribir 'C(CC)B' en vez de '(C(CC))B', y 'B(W(WW))WW' en vez de '((B(W(WW)))W)W'. Pero esta convención no permitiría la omisión de paréntesis en 'C(CC)B' o en 'B(W(WW))W'. En general sólo pueden omi-

tirse los paréntesis que "convergen a la izquierda". Así 'B((WW)W)W' podría reescribirse como 'B(WWW)W' pero *no* como 'BWWWW'. En otras palabras, se supone que los paréntesis omitidos se asocian a la izquierda (cp. 16.51).

41.2. En lógica combinatoria la combinación de una fbf con otra da una fbf que denota el resultado de *aplicar* una función denotada por la primera fbf a la entidad denotada por la segunda. (La aplicación de la función es aplicación real en el sentido de 40.4.) Así si ⌜*F*⌝ denota una función *f* y si ⌜*A*⌝ denota algún *a* que puede ser un argumento de *f*, entonces ⌜*FA*⌝ denotaría *f*(*a*); esto es, denotaría el valor de *f* para el argumento *a*; en otras palabras, denotaría el resultado de aplicar *f* a *a* (cp. 05.3). Puede considerarse que todas las fbfs de lógica combinatoria denotan funciones. En caso de que ⌜*A*⌝ en el ejemplo anterior denote algún *a* que no puede ser argumento de *f*, podemos redefinir *f* de modo que *a* se permita como argumento, y podemos especificar arbitrariamente el valor *f*(*a*) de *f* para el argumento *a*. Así, en la práctica, puede considerarse que toda fbf de lógica combinatoria denota una función, y puede considerarse que el dominio de definición de cada una de estas funciones contiene todos los objetos denotados por fbfs. En particular cada función denotada por una fbf está ella misma en su propio dominio de la definición.

41.3. Así como ⌜*FA*⌝ denota el valor de la función (de un argumento) *f* para el argumento *a* (donde ⌜*F*⌝ denota *f* y ⌜*A*⌝ denota *a*), así también en lógica combinatoria, se considera que ⌜*FAB*⌝ denota el valor de una función de dos argumentos *f* para los dos argumentos *a* y *b*. En otras palabras, así como ⌜*FA*⌝ denota *f*(*a*), así también ⌜*FAB*⌝ es simplemente una forma de escribir ⌜(*FA*)*B*⌝. Por tanto también podemos considerar que ⌜*FAB*⌝ denota (*f*(*a*))(*b*). Así está implícito en la notación de lógica combinatoria que *f*(*a*, *b*) podría considerarse como lo mismo que (*f*(*a*))(*b*). Esto significa que las funciones de dos argumentos pueden considerarse como funciones de un argumento. Para evaluar una función *f* de este tipo, la evaluamos primero como una función de un argumento de su primer argumento *a*, y entonces tratamos ese valor, digamos *f*(*a*), como una función de un argumento del segundo argumento *b*. La evaluación de esta nueva función, *f*(*a*), para el segundo argumento, *b*, da como resultado (*f*(*a*))(*b*), que se considera entonces como lo mismo que *f*(*a*, *b*). De modo similar, podría considerarse que ⌜*FABC*⌝ denota *f*(*a*, *b*, *c*), y podría considerarse que ⌜*FABCD*⌝ denota *f*(*a*, *b*, *c*, *d*), y así sucesivamente, donde ⌜*F*⌝, ⌜*A*⌝, ⌜*B*⌝, ⌜*C*⌝, ⌜*D*⌝, ..., denotan respectivamente *f*, *a*, *b*, *c*, *d*, ...

41.4. Supongamos que f es una función proposicional de un argumento (05.7) y que a pertenece al dominio de la definición de f. Entonces f puede considerarse como un atributo o clase (05.8), y $f(a)$ como la proposición que asevera que a tiene el atributo f (o está en la clase f). En lógica combinatoria, como se señaló en 41.3, si 'F' denotase la función f, y si 'A' denotase un argumento a, entonces 'FA' denotaría $f(a)$, que en el caso que ahora consideramos es una proposición. Así, en lógica combinatoria usamos la notación 'FA' para denotar la proposición que asevera que a es miembro de (o tiene un atributo) f. De modo similar, si 'G' denota una relación diádica g (o una relación misma g (05.9)), y si 'A' y 'B' denotan respectivamente 'a' y 'b', entonces 'GAB' denotaría la proposición $g(ab)$ que asevera que a tiene la relación g con b. Además, ya que 'GAB' es una abreviación de '$(GA)B$', vemos que puede considerarse que la proposición denotada por 'GAB' asevera que b es miembro de una clase denotada por 'GA' (así como la proposición denotada por 'FB' asevera que b es miembro de f). Esta clase denotada por 'GA' debe ser claramente la clase de los objetos con los que a tiene la relación g, y decir que b pertenece a esta clase es lógicamente equivalente a decir que a mantiene la relación g con b. Así, en general en lógica combinatoria, si 'G' denota una relación (o relación misma) diádica g y si 'A' denota algún a, entonces 'GA' denota la clase de los objetos (o los atributos poseídos precisamente por éstos) con los que a tiene la relación g. En particular, en lógica combinatoria se usa con frecuencia el símbolo 'Q' para denotar identidad (42.2), de modo que 'QA' sería la clase de objetos con los que a tiene la relación de identidad, esto es, la clase de los objetos a los que a es idéntico. Así 'QA' denota la clase unitaria que tiene a a como su único miembro (64.2). Esta clase también se denotaría por '$= A$' si se denota la identidad mediante '=' en lugar de mediante 'Q'.

41.5. Ocasionalmente la notación '$F(A)$', '$F(A, B)$', '$F(A, B, C)$', ..., se usa en lógica combinatoria en vez de 'FA', 'FAB', '$FABC$', ... Esto puede hacerse usando '$\{F\}(A)$' en lugar de 'FA', y definiendo '$F(A)$', '$F(A, B)$', '$F(A, B, C)$', ... como abreviaciones de '$\{F\}(A)$', '$\{\{F\}(A)\}(B)$', '$\{\{\{F\}(A)\}(B)\}(C)$',..., respectivamente (cp. Church 3594). Más simplemente podemos usar '$F(A)$' en lugar de 'FA', y definir '$F(A,B)$', '$F(A, B, C)$', ..., como '$F(A)(B)$', '$F(A)(B)(C)$', ... (cp. Fitch, *Philosophy of Science,* Vol. 25 (1958) pp. 263-279).

42. Ejemplo de un sistema simple de lógica combinatoria

42.1. Con el fin de aclarar el significado de algunos de los símbolos más comunes de lógica combinatoria presentamos ahora un ejemplo de un sistema simple de lógica combinatoria. La notación antes usada es esencialmente standard aunque las letras mayúsculas aparecen normalmente como mayúsculas itálicas.

42.2. Sean 'Q', 'I', 'B', 'C', 'W' y 'K' las fbfs atómicas del sistema. (También podemos introducir variables como fbfs atómicas ulteriores, pero para este sistema no se requieren variables.) Si ⌜a⌝ y ⌜b⌝ son fbfs del sistema, entonces ⌜ab⌝ es una fbf del sistema. Suponemos la convención establecida en 41.1. Para decir que una fbf ⌜a⌝ es un teorema del sistema escribimos:

$$\vdash a.$$

Escribimos ⌜$[a = b]$⌝ en vez de ⌜Qab⌝. Los axiomas del sistema estarán integrados por todas las fbfs de las formas siguientes:

$[a = a]$	(Axiomas de la reflexividad de la identidad)
$[Ia = a]$	(Axiomas para 'I')
$[Babc = a(bc)]$	(Axiomas para 'B')
$[Cabc = acb]$	(Axiomas para 'C')
$[Wab = abb]$	(Axiomas para 'W')
$[Kab = a]$	(Axiomas para 'K').

Las reglas de inferencia del sistema serían las dos siguientes (más una regla tácita en el sentido de que si ⌜a⌝ es un axioma, entonces $\vdash a$):

(i) Si $\vdash[a = b]$ o $\vdash[b = a]$, y si $\vdash(\ldots a\ldots)$, donde ⌜$(\ldots a\ldots)$⌝ es cualquier fbf que contenga la fbf ⌜a⌝, entonces $\vdash(\ldots b\ldots)$, donde ⌜$(\ldots b\ldots)$⌝ es una fbf igual que ⌜$(\ldots a\ldots)$⌝ a excepción de que ⌜b⌝ ha reemplazado a ⌜a⌝ en uno o más lugares. (Regla de reemplazo para la identidad.)

(ii) Si $\vdash[ac = bc]$ para toda fbf ⌜c⌝, entonces $\vdash[a = b]$. (Regla de extensionalidad, llamada a veces regla zeta.)

42.3. En este sistema podemos demostrar fácilmente que si $\vdash[a = b]$, entonces $\vdash[b = a]$; y también: si $\vdash[a = b]$ y $\vdash[b = c]$, entonces $\vdash[a = c]$.

42.4. Con el fin de demostrar que $\vdash[BI = I]$ procederíamos del modo siguiente:

(1) $\vdash[\mathrm{B}Iab = \mathrm{I}(ab)]$ (Axioma para 'B')
(2) $\vdash[\mathrm{I}(ab) = ab]$ (Axioma para 'I')
(3) $\vdash[\mathrm{B}Iab = ab]$ (1), (2), (i)
(4) $\vdash[Ia = a]$ (Axioma para 'I')
(5) $\vdash[\mathrm{B}Iab = Iab]$ (3), (4), (i)
(6) $\vdash[\mathrm{B}Ia = Ia]$ (5), (ii)
(7) $\vdash[\mathrm{BI} = \mathrm{I}]$ (6), (ii).

42.5. En este sistema también podemos demostrar, por ejemplo, $\vdash[\mathrm{I} = \mathrm{CKK}]$, o de modo más general, $\vdash[\mathrm{I} = \mathrm{CK}a]$. De hecho, los axiomas para 'I' podrían omitirse, ya que 'I' se consideraría como una abreviación de 'CKK'.

42.6. La importancia de los axiomas para 'I', 'B', 'C', 'W' y 'K', se ve a partir del hecho de que pueden obtenerse los resultados siguientes: Si '$(\ldots a\ldots)$' es cualquier fbf en la que ocurre una o más veces la fbf 'a', entonces puede encontrarse una fbf 'f' tal que $\vdash[fa = (\ldots a\ldots)]$, y realmente tal que $\vdash[fb = (\ldots b\ldots)]$, donde '$(\ldots b\ldots)$' se obtiene a partir de '$(\ldots a\ldots)$' reemplazando 'a' por 'b' en la expresión completa '$(\ldots a\ldots)$'. Por ejemplo, si 'a' es 'W' y si '$(\ldots a\ldots)$' es 'B(WW)', entonces la 'f' requerida sería 'W(BB)', y podemos demostrar $\vdash[\mathrm{W(BB)W} = \mathrm{B(WW)}]$ y realmente para toda fbf 'b' $\vdash[\mathrm{W(BB)}b = \mathrm{B}(bb)]$. Podría considerarse que la 'f' requerida denota la función denotada por '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' en la notación del operador λ (06.2) y esta 'f' podría abreviarse como '$[x](\ldots x\ldots)$' (45.6). Por tanto podría considerarse que '$\lambda x(\mathrm{B}(xx))$' denota la misma función que 'W(BB)'. Así se ve que el efecto del uso del operador λ es obtenible indirectamente en la teoría de combinadores.

42.7. En la notación usada por Curry podríamos escribir simplemente

$$a = b$$

en lugar de

$$\vdash[a = b].$$

43. Combinaciones y la teoría de combinadores

43.1. En lógica combinatoria no sólo podemos decir que 'ab' es la combinación de 'a' con 'b', sino que también podemos usar el término 'combinación' del modo siguiente: La clase de las combinaciones de fbfs 'a_1', 'a_2', ..., 'a_n' se define como sigue:

(1) Cada $\ulcorner a_1 \urcorner$, $\ulcorner a_2 \urcorner$, ..., $\ulcorner a_n \urcorner$ es una combinación (en sentido trivial) de $\ulcorner a_1 \urcorner$, $\ulcorner a_2 \urcorner$, ..., $\ulcorner a_n \urcorner$.

(2) Si $\ulcorner a \urcorner$ y $\ulcorner b \urcorner$ son combinaciones de $\ulcorner a_1 \urcorner$, $\ulcorner a_2 \urcorner$, ..., $\ulcorner a_n \urcorner$, también lo es $\ulcorner ab \urcorner$.

(3) Las únicas combinaciones de $\ulcorner a_1 \urcorner$, $\ulcorner a_2 \urcorner$, ..., $\ulcorner a_n \urcorner$ son aquellas que puede demostrarse que son tales por el uso de (1) y (2). Por ejemplo, $\ulcorner a_1 \urcorner$, $\ulcorner a_2 a_1 \urcorner$, $\ulcorner a_1 a_1 (a_2 a_1) \urcorner$ y $\ulcorner a_3 a_5 (a_2 (a_2 a_1)) \urcorner$ son combinaciones de $\ulcorner a_1 \urcorner$, $\ulcorner a_2 \urcorner$, $\ulcorner a_3 \urcorner$, $\ulcorner a_4 \urcorner$, y $\ulcorner a_5 \urcorner$.

43.2. Supongamos que $\ulcorner b \urcorner$ es una combinación de $\ulcorner a_1 \urcorner$, $\ulcorner a_2 \urcorner$, ..., $\ulcorner a_n \urcorner$ y que $\ulcorner f \urcorner$ tiene la propiedad siguiente para todas las $\ulcorner c_1 \urcorner$, $\ulcorner c_2 \urcorner$, ..., $\ulcorner c_n \urcorner$: Si $\ulcorner d \urcorner$ es el resultado de reemplazar $\ulcorner a_1 \urcorner$, $\ulcorner a_2 \urcorner$, ..., $\ulcorner a_n \urcorner$ por $\ulcorner c_1 \urcorner$, $\ulcorner c_2 \urcorner$, ..., $\ulcorner c_n \urcorner$ respectivamente en toda la expresión $\ulcorner b \urcorner$, entonces

$$f c_1 \dots c_n = d .$$

Se dice que un $\ulcorner f \urcorner$ de este tipo es un *combinador propio*. Por ejemplo, 'W' es un combinador propio, porque si $\ulcorner b \urcorner$ se toma como $\ulcorner a_1 a_2 a_2 \urcorner$, entonces, para todo $\ulcorner c_1 \urcorner$ y $\ulcorner c_2 \urcorner$ tenemos

$$\mathrm{W} c_1 c_2 = c_1 c_2 c_2 .$$

De modo similar 'I', 'B', 'C' y 'K' son combinadores propios porque tenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} c_1 &= c_1 , \\ \mathrm{B} c_1 c_2 c_3 &= c_1 (c_2 c_3) , \\ \mathrm{C} c_1 c_2 c_3 &= c_1 c_3 c_2 , \\ \mathrm{K} c_1 c_2 &= c_1 . \end{aligned}$$

Adviértase que 'Q' no es un combinador propio. (Por 43.7 ni siquiera es un combinador.) Decimos que 2 es el *orden* de 'W' y de 'K', que 1 es el orden de 'I' y que 3 es el orden de 'B' y 'C'. En general el orden de un combinador propio $\ulcorner f \urcorner$ es el menor n para el que $\ulcorner f \urcorner$ tiene la propiedad antes descrita.

43.3. La mayoría de los sistemas de lógica combinatoria contienen los combinadores propios 'I', 'B', 'C', 'W' (esto es, combinadores propios que tienen las propiedades asignadas a 'I', 'B', 'C', 'W' en el sistema del apartado 42) y a veces también contienen 'K'. Estos combinadores propios podrían aparecer como fbfs atómicas, como en 42.2, o podrían definirse como ciertas combinaciones de otros combinadores propios. 'I' se

denomina *identificador elemental,* 'B' se denomina *compositor elemental,* 'C' se denomina *permutador elemental,* 'W' se denomina *duplicador elemental,* y 'K' se denomina *cancelador elemental.*

43.4. Otros combinadores propios usados frecuentemente en lógica combinatoria son 'S', 'T', 'Φ' 'Ψ' y 'J'. (A veces 'T' se escribe como 'C_*'.) Las identidades que caracterizan a estos combinadores son las siguientes:

$$\begin{aligned} Sabc &= ac(bc), \\ Tab &= ba, \\ \Phi abcd &= a(bd)(cd), \\ \Psi abcd &= a(bc)(bd), \\ Jabcd &= ab(adc). \end{aligned}$$

43.5. También existen los llamados *combinadores numéricos,* '0', '1', '2', '3', ..., que son combinadores propios que tienen las propiedades:

$$\begin{aligned} 0ab &= a, \\ 1ab &= ab, \\ 2ab &= a(ab), \\ 3ab &= a(a(ab)), \text{ y así sucesivamente.} \end{aligned}$$

A veces se usa la notación 'Z_0', 'Z_1', 'Z_2', ..., en lugar de '0', '1', '2', ...

43.6. Si se considera que los combinadores numéricos denotan los enteros no negativos, entonces puede considerarse que el combinador propio 'B' denota la multiplicación, y podemos escribir '$[a \times b]$' o '$(a \cdot b)$' como una abreviación de 'Bab'. Además, puede considerarse que el operador propio 'ΦB' denota la suma, y podemos escribir '$[a + b]$' o '$(a + b)$' como una abreviación de 'ΦBab'. La equivalencia que caracteriza a 'ΦB' es la siguiente:

$$\Phi Babcd = ac(bcd).$$

La exponenciación puede emplearse fácilmente definiendo 'a^b' como una abreviación de 'ba'.

43.7. Un *combinador* se define como cualquier combinación de combinadores propios. Algunas combinaciones de combinadores propios son combinadores propios, otras no lo son. Por ejemplo, 'ΦB' es una combinación de los combinadores propios 'Φ' y 'B' y es un combinador propio. De modo similar 'CI' es un combinador propio, pero 'WWW' y 'CII' no son combinadores propios, aunque son combinaciones de combinadores

propios. (Curry y Feys [CF] consideran los combinadores como las funciones denotadas por las expresiones llamadas aquí combinadores).

43.8. Algunos combinadores que no son combinadores propios representan operaciones importantes. Por ejemplo, considérese el combinador ' ' definido como 'WS(BWB)' (Este símbolo griego es la letra griega upsilon mayúscula.) Este combinador no es propio. Tiene la propiedad

$$Ya = a(Ya).$$

Podemos demostrar esto del modo siguiente:

$$\begin{aligned} Ya &= \mathrm{WS(BWB)}\, a, \\ \mathrm{WS(BWB)}\, a &= \mathrm{S(BWB)}\, aa, \\ \mathrm{S(BWB)}\, aa &= \mathrm{BWB}a(\mathrm{BWB}a), \\ \mathrm{BWB}a(\mathrm{BWB}a) &= \mathrm{W(B}a)(\mathrm{BWB}a), \\ \mathrm{W(B}a)(\mathrm{BWB}a) &= \mathrm{B}a(\mathrm{BWB}a)(\mathrm{BWB}a), \\ \mathrm{B}a(\mathrm{BWB}a)(\mathrm{BWB}a) &= a(\mathrm{BWB}a(\mathrm{BWB}a)), \\ a(\mathrm{BWB}a(\mathrm{BWB}a)) &= a(Ya). \end{aligned}$$

Este combinador es importante en relación con la paradoja de Russell ([CF] 258-262) y en relación con la recursión e inducción matemáticas. (En Fitch XX 81 y XXIV 240 se usan operadores estrechamente similares.) Este combinador también es importante en relación con el análisis combinatorio de los aspectos de retroalimentación de circuitos secuenciales. (Es el mismo que el operador 'Z_1' de Fitch, "Representation of Sequential Circuits in Combinatory Logic", *Philosphy of Science*, Vol. 25 (1958) pp. 263-279.)

44. Conversión lambda

44.1. En vez de partir de combinadores indefinidos tales como 'I', 'B', 'C', 'W', Church ha desarrollado un tipo de lógica combinatoria que parte del concepto de abstracción funcional como englobado en el uso del operador λ (cp. 06.2). Aquí las variables desempeñan un papel importante.

44.2. Se especifican infinitamente muchos símbolos como variables del sistema. La clase de las fbf (fórmulas bien formadas) de un sistema de *conversión* λ *(conversión lambda)* se define del modo siguiente:

(1) Toda variable es una fbf.
(2) Si ⌜a⌝ y ⌜b⌝ son fbfs, ⌜ab⌝ también lo es (cp. 41.1).
(3) Si ⌜x⌝ es una variable y si ⌜a⌝ es una fbf, entonces ⌜λxa⌝ es una fbf. (Algunas definiciones de la clase de fbfs podrían requerir aquí que ⌜x⌝ ocurra libre en ⌜a⌝.)
(4) Todas las fbfs lo son únicamente en virtud de (1)-(3).

44.3. ⌜λxa⌝ puede escribirse también como ⌜$\lambda x(a)$⌝ o como ⌜$\lambda x \cdot a$⌝. Si ⌜a⌝ puede considerarse como una forma asociada de una función (cp. 05.4) con respecto a la variable ⌜x⌝, entonces puede considerarse que ⌜$\lambda x \cdot a$⌝ denota la función misma. Por ejemplo, ⌜$\lambda x \cdot x^x$⌝ denotaría una función f tal que $f(x) = x^x$. (Aquí podemos pensar que ⌜x^x⌝ se define como al final de 43.6.)

44.4. Si ⌜x⌝ es una variable y si ⌜a⌝ es una fbf, entonces ⌜$\lambda x \cdot a$⌝ puede llamarse *abstracto* y ⌜λx⌝ es un *abstractor*. El abstractor ⌜λx⌝ es un operador monádico (06.1). En conformidad con 06.4 y 21.6, puede decirse que una ocurrencia de una variable ⌜x⌝ en una fbf ⌜a⌝ es una ocurrencia ligada de ⌜x⌝ con respecto a (y en) ⌜a⌝ si la ocurrencia en cuestión está en una parte bien formada de ⌜a⌝ de la forma ⌜$\lambda x \cdot b$⌝; de otro modo se dice que la ocurrencia de ⌜x⌝ es una ocurrencia libre de ⌜x⌝ con respecto a (y en) ⌜a⌝. De modo más general, se dice que una ocurrencia de una fbf ⌜c⌝ en una fbf ⌜a⌝ es una ocurrencia ligada de ⌜c⌝ en ⌜a⌝ si alguna ocurrencia de una variable que es libre en ⌜c⌝ es ligada en ⌜a⌝; de otro modo se dice que la ocurrencia de ⌜c⌝ en ⌜a⌝ es libre en ⌜a⌝.

44.5. ⌜$\lambda x \lambda y \cdot a$⌝ es una abreviación de ⌜$\lambda x(\lambda y \cdot a)$⌝, y ⌜$\lambda x \lambda y \lambda z \cdot a$⌝ es una abreviación de ⌜$\lambda x(\lambda y(\lambda z \cdot a))$⌝; y así sucesivamente. Una economía notacional más amplia se obtiene por las abreviaciones: ⌜$\lambda xy \cdot a$⌝ para ⌜$\lambda x \lambda y \cdot a$⌝; ⌜$\lambda xyz \cdot a$⌝ para ⌜$\lambda x \lambda y \lambda z \cdot a$⌝ y así sucesivamente.

44.6. Church define una relación de *interconvertibilidad* o *conversión* entre fbfs de su sistema de conversión λ de un modo tal que puede pensarse que fbfs interconvertibles denotan conceptos idénticos (o, en algún sentido, equivalentes). Esta noción de conversión o interconvertibilidad del sistema de Church tiene un papel muy similar al desempeñado por la relación que Curry denota mediante '='. De hecho la teoría de combinadores y la teoría de conversión λ son, esencialmente, modos ligeramente diferentes de tratar de la misma materia, y los conceptos fundamentales de cada teoría son definibles (con menores requisitos) en la otra.

44.7. Las tres *reglas de conversión* de Church *(reglas de conversión λ)* pueden parafrasearse del modo siguiente, combinando su segunda y tercera regla en una regla simple:

I. Las fbfs ⌜*a*⌝ y ⌜*b*⌝ son mutuamente convertibles con tal que sean iguales excepto en que una parte bien formada de ⌜*b*⌝ difiere de la correspondiente parte bien formada de ⌜*a*⌝ en tener todas las ocurrencias ligadas de una variable ⌜*x*⌝ reemplazadas por ocurrencias ligadas de una variable ⌜*y*⌝. (Debe entenderse que las ocurrencias de ⌜*x*⌝ son ligadas con respecto a la parte de ⌜*a*⌝ en cuestión, y que las ocurrencias de ⌜*y*⌝ son ligadas con respecto a la parte correspondiente de ⌜*b*⌝. También debe entenderse que ⌜*x*⌝ e ⌜*y*⌝ no ocurren ligadas ambas en la parte de ⌜*a*⌝ en cuestión. Las "partes" de ⌜*a*⌝ y ⌜*b*⌝ en cuestión podrían ser ⌜*a*⌝ y ⌜*b*⌝ mismas, y de modo similar en la Regla II.)

II. Las fbfs ⌜*a*⌝ y ⌜*b*⌝ son mutuamente convertibles con tal que sean iguales excepto en que una parte bien formada de ⌜*a*⌝ es de la forma ⌜(λ*x* · *c*)*d*⌝, mientras la parte bien formada correspondiente ⌜*e*⌝ de ⌜*b*⌝ es el resultado de reemplazar en ⌜*c*⌝ las ocurrencias de ⌜*x*⌝ que están libres (en ⌜*c*⌝) por ocurrencias de ⌜*d*⌝ que están libres en ⌜*e*⌝.

44.8. La anterior Regla I corresponde a lo que Curry llama regla de "conversión α" mientras la Regla II corresponde a lo que llama reglas de "conversión β". La regla siguiente corresponde a la regla llamada por Curry regla de "conversión η":

> Las fbfs ⌜*a*⌝ y ⌜*b*⌝ son mutuamente convertibles con tal que sean iguales excepto en que una parte bien formada de ⌜*a*⌝ es de la forma ⌜λ*x* · *cx*⌝, donde ⌜*x*⌝ no es libre en ⌜*c*⌝, mientras la parte correspondiente de ⌜*b*⌝ es ⌜*c*⌝ mismo.

44.9. Se supone que la relación de convertibilidad es reflexiva, simétrica y transitiva, así como que satisface las reglas I y II (y quizá también la regla de conversión η). Para decir que ⌜*a*⌝ es convertible en ⌜*b*⌝, podemos escribir ⌜*a* cnv *b*⌝. Los siguientes son ejemplos de conversiones válidas, suponiendo que ⌜*x*⌝ e ⌜*y*⌝ son variables distintas que no ocurren libres en ⌜*f*⌝:

$(\lambda x.fx)a$ cnv $(\lambda y.fy)a$	(por conversión α)
$\lambda x.fx$ cnv f	(por conversión η)
$(\lambda x.fx)a$ cnv fa	(por conversión β o por conversión η)
$(\lambda x.fxy)a$ cnv fay	(por conversión β)

$(\lambda y.(\lambda x.fxy))a$ cnv $\lambda x.fxa$	(por conversión β)
$(\lambda yx.fxy)a$ cnv $\lambda x.fxa$	(por conversión β; cp. 44.5)
$(\lambda yx.fxy)ab$ cnv $(\lambda x.fxa)b$	(por conversión β)
$(\lambda x.fxa)b$ cnv fba	(por conversión β)
$(\lambda yx.fxy)\,ab$ cnv fba	(por conversión β dos veces y transitividad de la conversión).

De modo similar éstas son válidas en dirección inversa, por ejemplo:

$$fa \text{ cnv } (\lambda x.fx)a.$$

45. Definiciones de combinadores como abstractos

45.1. Los combinadores propios 'I', 'C', 'W', 'B', 'S', 'T', 'Φ', 'Ψ', y 'J' pueden definirse en el sistema de conversión λ de Church por medio de las abreviaciones siguientes, donde $\ulcorner x\urcorner$, $\ulcorner y\urcorner$, $\ulcorner z\urcorner$ y $\ulcorner w\urcorner$ son variables distintas:

'I' para $\ulcorner\lambda x.x\urcorner$,
'C' para $\ulcorner\lambda xyz.xzy\urcorner$,
'W' para $\ulcorner\lambda xy.xyy\urcorner$,
'B' para $\ulcorner\lambda xyz.x(yz)\urcorner$,
'S' para $\ulcorner\lambda xyz.xz(yz)\urcorner$,
'T' para $\ulcorner\lambda xy.yx\urcorner$,
'Φ' para $\ulcorner\lambda xyzw.x(yw)(zw)\urcorner$,
'Ψ' para $\ulcorner\lambda xyzw.x(yz)(yw)\urcorner$,
'J' para $\ulcorner\lambda xyzw.xy(xwz)\urcorner$.

45.2. Como ejemplo del uso de las definiciones anteriores, podemos demostrar que Babc cnv $a(bc)$. Esto corresponde a demostrar que $Babc = a(bc)$ en la teoría de combinadores de Curry. El procedimiento puede bosquejarse del modo siguiente: En primer lugar reescribimos $\ulcorner Babc\urcorner$ como

$$(\lambda xyz.x(yz))abc.$$

Suponemos que $\ulcorner x\urcorner$, $\ulcorner y\urcorner$ y $\ulcorner z\urcorner$ se han elegido de modo que no ocurren libres en $\ulcorner a\urcorner$, $\ulcorner b\urcorner$ y $\ulcorner c\urcorner$. Entonces, de acuerdo con 44.5 reescribimos la fórmula anterior así:

$$(\lambda x(\lambda y(\lambda z.x(yz))))abc.$$

Entonces tenemos:

$$(\lambda x(\lambda y(\lambda z.x(yz))))abc \text{ cnv } (\lambda y(\lambda z.a(yz)))bc,$$
$$(\lambda y(\lambda z.a(yz)))bc \text{ cnv } (\lambda z.a(bz))c,$$
$$(\lambda z.a(bz))c \text{ cnv } a(bc).$$

45.3. Si la clase de las fbfs se define de tal modo que '$\lambda x \cdot a$' es una fbf si 'x' es una variable y 'a' es una fbf, prescindiendo de si 'x' ocurre o no libre en 'a' (ver (3) de 44.2), entonces el combinador 'K' puede definirse como una abreviación del abstracto siguiente:

$$\lambda xy.x.$$

Para demostrar que Kab cnv a, reescribimos '$\lambda xy \cdot x$' como '$\lambda x(\lambda y \cdot x)$', y entonces (suponiendo, naturalmente, que 'x' e 'y' no son libres en 'a') tenemos:

$$(\lambda x(\lambda y.x))ab \text{ cnv } (\lambda y.a)b,$$
$$(\lambda y.a)b \text{ cnv } a.$$

45.4. Si la clase de las fbfs se ha definido como se ha indicado en 45.3, entonces los combinadores numéricos pueden definirse por medio de las siguientes abreviaciones, donde 'x' e 'y' son variables distintas:

'0' para '$\lambda xy.y$',
'1' para '$\lambda xy.xy$',
'2' para '$\lambda xy.x(xy)$',
'3' para '$\lambda xy.x(x(xy))$',
'4' para '$\lambda xy.x(x(x(xy)))$', y así sucesivamente.

Lo estipulado al principio de 45.3 se requiere en relación a la definición de '0' pero no en relación a la definición de los otros combinadores numéricos.

45.5. El combinador que denota multiplicación puede definirse del mismo modo que 'B', ya que puede considerarse que 'B' denota multiplicación. El combinador '+' para la suma puede definirse como '$\lambda xyzw \cdot xz(yzw)$' o como '$\lambda xyz \cdot \mathrm{B}(xz)(yz)$.' Si escribimos '$[a \times b]$' para '$Bab$' y '$c^d$' para '$dc$', entonces '+' podría definirse como '$\lambda xyz \cdot [z^x \times z^y]$'. (Ver también 43.6.) Entonces podemos demostrar que $+ abc$ cnv $[c^a \times c^b]$. Si escribimos '$[a + b]$' para '$+ ab$' y '$c^{[a+b]}$' para '$[a + b]c$', la conversión anterior pasa a ser:

$$c^{[a+b]} \text{ cnv } [c^a \times c^b].$$

45.6. Así como los combinadores individuales pueden definirse por el uso del operador λ, del mismo modo también el operador λ, o al menos una operación esencialmente equivalente a él, puede definirse en términos de combinadores. (Cp. notas al final de 42.6.) Este operador, así definido, lo escribe Curry como '$[x]$', donde 'x' es una variable. Así en el sistema combinatorio de la sección 42, el operador '$[x]$' podría definirse adecuadamente y podría usarse para desempeñar un papel similar al desempeñado por 'λx' en los sistemas de conversión λ. En relación con esto, podría ser conveniente suponer que el sistema incluye variables, pero no es necesario hacerlo así. Las variables que aparecieron en los operadores de la forma '$[x]$' y en expresiones de la forma '$[x](\ldots x\ldots)$' podrían considerarse como eliminables por definición. (Para algunos métodos de definir '$[x]$' ver [CF], pp. 188 ff.)

46. Ulteriores extensiones de lógica combinatoria

46.1. La lógica combinatoria se ha extendido considerablemente más allá de la teoría de combinadores (cp. [CF] pp. 257 ff.). En particular Curry ha introducido un operador 'F' tal que si 'a' y 'b' denotan categorías y si 'g' denota una función, entonces puede interpretarse que '$Fabg$' significa que, para todo c, si c está en la categoría a, entonces $g(c)$ está en la categoría b. (Aquí podríamos escribir 'gc' en vez de '$g(c)$' si deseamos ajustarnos totalmente a la notación combinatoria.) La teoría de 'F' desarrollada por Curry se denomina "teoría de funcionalidad".

46.2. En relación con la teoría de funcionalidad, se considera el operador 'Π' de universalidad ilimitada y el operador 'Ξ' de universalidad restringida. La expresión 'Πa' puede considerarse como burdamente equivalente a '$(x)(ax)$' (esto es, el enunciado de que a es una clase universal), y le expresión 'Ξab' puede considerarse como burdamente equivalente a '$(x)[ax \supset bx]$' (esto es, el enunciado de que todo miembro de a es miembro de b).

CAPITULO 5

CALCULO DE CLASES

50. Introducción

50.1. Puede considerarse que el enunciado 'Todo hombre es mortal' asevera que todo lo que es hombre es mortal, o, equivalentemente, que la clase de los hombres es una subclase de la clase de los mortales. El primer punto de vista es apropiado en relación con el cálculo funcional de primer orden, ya que entonces podemos expresar el enunciado como '$(x)[f(x) \supset g(x)]$'. El último punto de vista es apropiado en relación con el cálculo de clases, ya que entonces se considera que el enunciado asevera que se da una cierta relación entre dos clases. Realmente, como ya se señaló en otra parte (05.8), las clases pueden considerarse como propiedades (atributos) de un tipo especial, y las propiedades mismas pueden considerarse como funciones proposicionales de un argumento (05.7).

50.2. El término *conjunto* se emplea con frecuencia como sinónimo del término *clase,* y el primer término podría reemplazar propiamente al último en muchos lugares de este Diccionario. Sin embargo, a causa de la uniformidad, usaremos el término *clase* con preferencia al término *conjunto* excepto en contextos especiales en los que estos términos tienen una diferencia técnica de significado. Uno de estos contextos especiales es la llamada *teoría de conjuntos.* Este campo de estudio proporciona sistemas axiomáticos para tratar los conjuntos como clases de un tipo especial, y a veces hace una aguda distinción técnica entre el término *conjunto* y el término *clase* (82.1). (Cp. Gödel, VI 112.) Consideraremos

este campo como algo fuera del alcance de este Diccionario, aunque las notaciones de la teoría de conjuntos con frecuencia son similares a las del cálculo de clases.

50.3. En [Q] (158 ff.) se hace una distinción, basada en la *estratificación* (31.4), entre aquellas clases que son susceptibles de ser *elementos* (miembros) de clases, y aquellas que no lo son. Esta distinción entre clases que tienen elementalidad y clases que no la tienen es parecida a la distinción entre conjunto y clase en teoría de conjuntos (cp. 82.1).

50.4. En la primera edición de [PM], que adopta la teoría de tipos ramificada (31.3), las clases se representan por la clase de las expresiones que se definen sólo contextualmente (así como las frases descriptivas definidas, en [PM], se definen sólo contextualmente (26.43)). Se requiere el *Axioma de Reducibilidad* para la adecuación de este tratamiento de clases. Este axioma establece que correspondiendo a cualquier propiedad que tenga un tipo de orden $n + m$ (cp. 31.3) que se aplique a objetos de un tipo de orden n, existe una propiedad equivalente (que se aplica a los mismos objetos, y sólo a ellos, que la propiedad original) pero que tiene un tipo de orden $n + 1$. Una propiedad tal, de solo un orden mayor que el orden de aquello a lo que se aplica, es llamada por Russell *propiedad predicativa.* Según la teoría de clases de Russell, cualquier enunciado ostensiblemente relativo a la clase de los objetos que tienen una propiedad F es realmente un enunciado sobre una propiedad predicativa equivalente a F (y por el Axioma de Reducibilidad siempre existe una propiedad predicativa de este tipo). Por tanto si '$(\ldots x\ldots)$' es una forma asociada a F (05.2), y si '$\hat{x}(\ldots x\ldots)$' es una clase de expresión que denota la clase de los objetos que tienen F, entonces un enunciado, '$(\text{---}\hat{x}(\ldots x\ldots)\text{---})$', sobre $\hat{x}(\ldots x\ldots)$, puede considerarse realmente como '$(\exists g)[(x)[g(x) \equiv (\ldots x\ldots)].(\text{---}g\text{---})]$', donde '$g$' es una variable de una propiedad predicativa de tipo adecuado. En particular, el orden del tipo de 'g' sería uno mayor que el orden del tipo de la variable 'x'. La notación propia de Russell ([PM] * 20.01) usaría

'$\phi!\hat{z}$'	en lugar de	'g',
'$\phi!x$'	en lugar de	'$g(x)$',
'$(\exists\phi)$'	en lugar de	'$(\exists g)$',
'ψx'	en lugar de	'$(\ldots x\ldots)$',
'$f[\hat{z}(\psi z)]$'	en lugar de	'$(\text{---}\hat{x}(\ldots x\ldots)\text{---})$', y
'$\phi!x.\equiv_x.\psi x$'	en lugar de	'$(x)[g(x) \equiv (\ldots x\ldots)]$',

de modo que, en esta notación, considera '$f[\hat{z}(\psi z)]$' como una abreviación de '$(\exists\phi):\phi!x.\equiv_x.\psi x:f(\phi!\hat{z})$'. La presencia del punto de admiración '!' indica que 'ϕ' es una variable de una propiedad predicativa. Esta teoría de clases significa dar el resultado deseado de que las clases que tienen los mismos miembros son idénticas (05.8). En la segunda edición de *Principia Mathematica,* toda esta aproximación fue desechada en favor de la teoría simple de tipos, y las clases se identificaron con funciones proposicionales, pero los cambios necesarios del sistema sólo fueron bosquejados burdamente. Una desventaja de este punto de partida revisado es que la teoría simple de tipos no proporciona en sí misma ninguna solución de las paradojas semánticas, tales como la Paradoja de Richard (3597). (La teoría simple de tipos también debe complementarse con un axioma de extensionalidad para garantizar que las clases que tienen los mismos miembros son idénticas.)

51. Variables, abstractos y constantes de clases

51.1. La mayoría de los sistemas que tratan con clases usan variables especiales que se refieren a clases. Por ejemplo, [PM] usa 'α', 'β' y 'γ' aunque existe una confusión aparente en [PM] entre tales variables y las variables que tienen fines metalingüísticos (08.3-08.8), como, por ejemplo, lo tienen las letras *'F', 'G', 'H'* en [F]. Realmente en [PM] parece que los símbolos griegos 'α', 'β', y 'γ' se usan a la vez como variables de clases y como variables metalingüísticas referidas a las expresiones de clase.

51.2. En muchos sistemas pueden formarse los nombres de clases colocando una variable encapuchada '$\hat{x}$' a la izquierda de una forma '$(\ldots x\ldots)$', resultando una expresión '$\hat{x}(\ldots x\ldots)$' llamada *abstracto* (40.7). Esta notación aparece en [PM], [R] y [Q]. (En [PM] se usan las notaciones '$\phi\hat{x}$' y '$\psi\hat{x}$' para referirse a funciones proposicionales en vez de a clases, y las notaciones '$\phi!\hat{x}$' y '$\psi!\hat{x}$' para referirse a funciones proposicionales predicativas (cp. 50.4).)

51.3. Otras notaciones para '$\hat{x}(\ldots x\ldots)$' son '$x\ni(\ldots x\ldots)$' (Peano y algunos artículos de Quine II 51, III 53), y '$(x\backslash(\ldots x\ldots))$' (en [F] (94)). En [R] (220) se mencionan las notaciones '$\{x|(\ldots x\ldots)\}$' y '$\mathrm{E}_x(\ldots x\ldots)$' como alternativas de '$\hat{x}(\ldots x\ldots)$'. En [R] (222) hay también una generalización ulterior de esta notación de modo que, por ejemplo, '$\{y_1 + y_2|y_1\in\alpha.y_2\in\beta\}$' de-

notaría la clase de sumas cuyo primer sumando está en la clase a la que nos referimos mediante 'α' y cuyo segundo sumando está en la clase a la que nos referimos mediante 'β'. En general, '$\{A|P\}$' se considera como una abreviación de '$\hat{x}(\exists y_1)(\exists y_2)\ldots(\exists y_n)[[x = A].P]$' donde '$x$' no ocurre libre ni en 'A' ni en 'P' y donde 'y_1', 'y_2', ..., 'y_n' son todas las variables que ocurren libres en 'A' o en 'P'.

51.4. Dos notaciones importantes son 'V', usada como un nombre de la *clase universal,* y 'Λ', usada como un nombre de la clase vacía ([PM]*24). Estos símbolos, que son nombres propios más que variables, pueden llamarse constantes (03.1). A veces se usa '1' para denotar la clase universal y '0' para denotar la clase vacía. Por clase universal se entiende con frecuencia la clase de todos los individuos (05.7, 20.1), y en este caso 'V' puede definirse como '$\hat{x}[x = x]$', donde 'x' es una variable que se refiere a individuos ([R] 226). Otra definición posible de 'V' es '$\hat{x}Y$' (cp. 12.7). Donde se usa una teoría de tipos, puede haber una clase universal correspondiente a cada tipo. En [F] (105) '$\cup$' representa la clase universal; pero esta clase $\cup$ es la clase de todas las entidades y no precisamente de todos los individuos y no se involucra ninguna teoría de tipos. La clase vacía 'Λ' puede definirse como '$\hat{x}[x \neq x]$' ([R] 226) o como '$\hat{x}\,\Lambda$' (cp. 12.7). Si 'x' es una variable que se refiere a individuos solamente, entonces podría considerarse que, en este caso, 'Λ' denota la clase vacía de individuos (05.7, 20.1). Donde se usa una teoría de tipos, puede haber una clase vacía correspondiente a cada tipo. A veces se usa el término *clase nula* en lugar del término *clase vacía.* Ocasionalmente se hace una distinción entre estos dos términos, de modo que toda clase "nula" es una clase "vacía", pero sólo aquellas clases "vacías" que son necesariamente "vacías" son "nulas".

51.5. Si se usa una teoría de tipos para tratar con clases, entonces los tipos se asignarán a las clases del mismo modo esencialmente que a las funciones proposicionales, ya que las clases pueden considerarse como funciones proposicionales (o atributos) que satisfacen un principio de extensionalidad (05.8). Consecuentemente, los abstractos y otras notaciones para las clases pueden involucrar indicaciones de tipos (32).

52. Operadores correspondientes a los del cálculo funcional

52.1. El símbolo 'ϵ' puede usarse de tal modo que '$x \epsilon \alpha$' es definible como, o burdamente equivalente a, '$\alpha(x)$' (cp. la notación funcional en

05.3 y 20.3; también [F] (89)). '$x \in \alpha$' puede emplearse para significar que x es miembro de la clase α. En [Q] (162) '$x \in V$' se emplea para significar que x es un "elemento". Cuando se usan tipos, y cuando '$\in$' está en el contexto '$x \in \alpha$' donde 'x' es del tipo ι, el símbolo '$\in$' es del tipo $o\iota(o\iota)$ (cp.32.21-32.24). La notación '$x, y \in \alpha$' se usa con frecuencia como una abreviación de '$[x \in \alpha] . [y \in \alpha]$' ([PM] * 20.04). (En las sentencias anteriores y en las sucesivas, las letras griegas 'α', 'β' y 'γ' se usan como letras itálicas con fines metalingüísticos. Véase 08.3-08.8 y especialmente 08.7.)

52.2. Si 'α' es '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' o '$\hat{x}(\ldots x\ldots)$', entonces '$(x)(\ldots x\ldots)$' puede tratarse como '$\Pi\alpha$', donde '$\Pi$' es un operador de lógica combinatoria (40.8) y '$\Pi\alpha$' significa que α es una clase universal. De modo similar, [F] (132) trata a '$(x)[x \in F]$' como una abreviación de '$F \in \mathrm{A}$', que significa que F tiene el atributo A de universalidad, o en otras palabras, que todo objeto tiene el atributo F (todo objeto pertenece a la clase F).

52.3. Si 'α' es '$\lambda x(\ldots x\ldots)$' o '$\hat{x}(\ldots x\ldots)$', entonces '$(\exists x)(\ldots x\ldots)$' puede tratarse como '$\Sigma\alpha$', donde '$\Sigma$' es un operador de lógica combinatoria (40.8) y '$\Sigma\alpha$' significa que α es una clase no vacía. La notación correspondiente en [PM] * 24 es '$\exists ! \alpha$'. De modo similar, [F] (145) trata a '$(\exists x)[x \in F]$' como una abreviación de '$F \in \mathrm{E}$', que significa que F tiene el atributo E de no vaciedad, o en otras palabras que algún objeto tiene el atributo F (algún objeto pertenece a la clase F).

53. Funciones de clases para proposiciones

53.1. Consideramos ahora algunas funciones de clases para proposiciones, es decir, algunas funciones cuyos argumentos son clases y cuyos valores son proposiciones.

53.2. La *inclusión* se expresa con frecuencia mediante el símbolo '$\subset$'. La expresión '$\alpha \subset \beta$' puede considerarse como una abreviación de '$(x)[x \in \alpha \supset x \in \beta]$' ([Q] 185) y puede emplearse para significar que α está incluido en β, o que, para todo x, si x es α entonces x es β, o en otras palabras, que α es una subclase de β.

53.3. La notación '$\subseteq$' o '$\subseteqq$' se usa con frecuencia en lugar de '$\subset$', por ejemplo en [R] (234) y [F] (184). La notación '$\alpha \subset \beta$' debe emplearse entonces significando que α está incluida en β pero β no está incluida en α, en otras palabras, que α está *incluida propiamente* en β (es una *subclase propia* de β). En este sentido de '$\alpha \subset \beta$', debería haber algún miembro de β que no es miembro de α. (Véase también 66.05).

53.4. Ya se ha empleado el símbolo '=' (25) para expresar la identidad entre individuos. Este símbolo también se emplea con frecuencia para expresar *igualdad de clases,* es decir, *inclusión mutua de clases.* La notación '$\alpha = \beta$' puede considerarse, por tanto, como un abreviación de '$(x)[x \in \alpha \equiv x \in \beta]$' ([R] 211) y emplearse para significar que, para todo x, x es α si y sólo si x es β. (En [F] (188) la notación '$F \simeq G$' es equivalente a '$(x)[x \in F \equiv x \in G]$'). Por otra parte, también puede usarse a veces este mismo símbolo '=' para expresar la definición leibniziana de identidad entre clases, ya que la definición leibniziana de identidad puede emplearse no sólo para individuos (30.8) sino también para clases. Si se usa una teoría de tipos, ésta requerirá una modificación de la definición para conformarla a los requisitos del tipo. Así, según la definición leibniziana de identidad, '$\alpha = \beta$' puede considerarse como una abreviación de '$(\gamma)[\alpha \in \gamma \equiv \beta \in \gamma]$' donde '$\gamma$' es de un tipo apropiadamente mayor que 'α' y 'β'. Puede usarse cualquiera de estas dos interpretaciones de '$\alpha = \beta$' (inclusión mutua de α y β, identidad leibniziana de α y β), y de hecho son mutuamente equivalentes si, como se acostumbra en el tratamiento de las clases, se supone el siguiente principio de extensionalidad para clases:

$$(\gamma)[\alpha \in \gamma \equiv \beta \in \gamma] \equiv (x)[x \in \alpha \equiv x \in \beta].$$

Este principio establece, en efecto, que dos clases son idénticas (en el sentido leibniziano) si y sólo si tienen los mismos miembros. Realmente el siguiente principio de extensionalidad más débil, en muchos sistemas de lógica, produce el mismo efecto que el principio anterior más fuerte:

$$(x)[x \in \alpha \equiv x \in \beta] \supset (\gamma)[\alpha \in \gamma \supset \beta \in \gamma].$$

53.5. '$\alpha \neq \beta$' se usa frecuentemente como una abreviación de '$\sim[\alpha = \beta]$' ([R] 163).

53.6. '$\exists ! \alpha$' se usa como una abreviación de '$(\exists x)[x \in \alpha]$' ([PM] * 24.03). Así '$\exists ! \alpha$' significa que α no es vacía (52.3).

54. Funciones de clases para clases

54.1. A continuación consideramos algunas funciones de clases para clases, es decir, algunas funciones cuyos argumentos y valores son clases.

54.2. La clase de todos los objetos que no son miembros de una clase α se llama complemento de α y normalmente se expresa mediante '$-\alpha$'.

(Con frecuencia se considera la complementación como relativa a alguna clase mayor β, de modo que, relativamente a β, el complemento de α es la clase de todos los miembros de β que no son miembros de α.) La complementación es por tanto una operación sobre clases y se denota usualmente mediante '—'. Si se considera que '—' denota una función, podemos decir que el valor de la función, para una clase dada como argumento, es el complemento de esa clase. Frecuentemente se considera '$-\alpha$' como una abreviación de '$\hat{x}(\sim[x \in \alpha])$'. Otras notaciones alternativas para '$-\alpha$' son '$\bar{\alpha}$' ([Q] 180, [R] 226) y '$C(\alpha)$' ([R] 226).

54.3. La clase de todos los objetos cada uno de los cuales es miembro de ambas clases α y β se denomina *intersección* (o *producto lógico*) de α con β, y usualmente se expresa por '$\alpha \cap \beta$'. Frecuentemente se considera '$\alpha \cap \beta$' como una abreviación de '$\hat{x}[x \in \alpha . x \in \beta]$'. La notación '$\alpha . \beta$' o '$\alpha\beta$' se emplea con frecuencia para representar el producto lógico de α con β. La intersección de tres clases α, β y γ puede expresarse como '$\alpha \cap \beta \cap \gamma$' y definirse bien como '$[\alpha \cap \beta] \cap \gamma$' o bien como '$\alpha \cap [\beta \cap \gamma]$'. De modo similar para más de tres clases.

54.4. La clase de todos los objetos cada uno de los cuales es miembro de una de ambas clases α y β se llama *unión* (o *suma lógica*) de α con β y usualmente se expresa por '$\alpha \cup \beta$'. Frecuentemente se considera '$\alpha \cup \beta$' como una abreviación de '$\hat{x}[x \in \alpha \vee x \in \beta]$'. La notación '$\alpha + \beta$' se usa a menudo para expresar la suma lógica de α y β. La unión de tres clases α, β y γ puede expresarse como '$\alpha \cup \beta \cup \gamma$' y definirse bien como '$[\alpha \cup \beta] \cup \gamma$' o bien como '$\alpha \cup [\beta \cup \gamma]$'. De modo similar para más de tres clases.

54.5. Otras funciones usadas ocasionalmente

54.51. La clase de aquellos miembros de α que no son miembros de β se denomina *diferencia* de α y β, y se expresa normalmente por '$\alpha - \beta$'. Frecuentemente se considera '$\alpha - \beta$' como una abreviación de '$\alpha \cap -\beta$' ([R] 226).

54.52. La clase de aquellos miembros de α que no son miembros de β y de aquellos miembros de β que no son miembros de α se llama *diferencia simétrica* de α y β y se expresa normalmente por '$\alpha * \beta$'. Frecuentemente se considera '$\alpha * \beta$' como una abreviación de '$[\alpha - \beta] \cup [\beta - \alpha]$' ([R] 238). Otras notaciones usadas a veces para esta clase son '$\alpha \oplus \beta$' y '$\alpha \triangle \beta$'. Cuando se usa la notación '$\alpha \oplus \beta$', la diferencia simétrica de α y β se denomina con frecuencia "círculo suma" de α y β.

54.53. La clase de aquellos objetos que son miembros del complemento de α o miembros de β se expresa normalmente por '$\alpha \supset \beta$'. Frecuentemente se considera '$\alpha \supset \beta$' como una abreviación de '$\overline{\alpha} \cup \beta$' (Quine 4585). (Adviértase la analogía con el uso del signo '$\supset$' que denota implicación material en 12.4, donde '$p \supset q$' es definible como '$\sim p \vee q$'.)

54.6. Si se usan pares ordenados (60.3) es posible definir el *producto cartesiano*, $\alpha \times \beta$, de la clase α con la clase β como la clase de aquellos pares ordenados $\langle x, y \rangle$ tales que x es el miembro de α e y es el miembro de β. Podemos considerar '$\alpha \times \beta$' como una abreviación de '$\hat{z}(\exists x, y)[x \in \alpha . y \in \beta . z = \langle x, y \rangle]$'. El producto cartesiano es una función de clases para clases de pares ordenados. (Véase también 62.2.) A veces el producto cartesiano se denomina *producto cruzado* o *producto directo*.

55. Funciones de clases de clases para clases

55.1. Si γ es una clase de clases (una clase cuyos miembros son clases a su vez), entonces la *intersección* de γ (o *producto lógico* de γ) se define como la clase de aquellos objetos cada uno de los cuales es miembro de γ. La intersección de γ se designa por '$\bigcap\gamma$' en [R] 239 y por '$\mathfrak{D}\gamma$' en [K] 16. Es necesario distinguir la intersección de una clase de clases, como la que se describe aquí, de la intersección de dos o más clases como la descrita en 54.3. Pero, supuesto que γ sea finito, la intersección de γ, $\bigcap\gamma$, en el presente sentido, puede considerarse como lo mismo que la intersección $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap \ldots$, de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, en el sentido de 54.3, donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, son todos los miembros de γ. Si γ tiene infinitos miembros, no hay intersección de estos miembros, en el sentido de 54.3, pero a pesar de ello hay intersección $\bigcap\gamma$ en el sentido presente.

55.2. Si γ es una clase de clases, entonces la *unión* de γ (o *suma lógica* de γ) se define como la clase de todos los miembros de los miembros de γ. La unión de γ se designa por '$\bigcup\gamma$' en [R] 259 y por '$\mathfrak{S}\gamma$' en [K] 16. Es necesario distinguir la unión de una clase de clases, como la que se describe aquí, de la unión de dos o más clases como la descrita en 54.4. Pero, supuesto que γ sea finito, la unión de γ, $\bigcup\gamma$, en el sentido presente, puede considerarse como lo mismo que la unión $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \ldots$, de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, en el sentido de 54.4, donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, son todos los miembros de γ. Si γ tiene infinitos miembros, entonces no hay unión de estos miembros en el sentido de 54.4, pero no obstante hay unión $\bigcup\gamma$ en el sentido presente.

55.3. A veces se usa la notación '$\prod_{\alpha\in\gamma}\alpha$' en vez de '$\bigcap\gamma$' y la notación '$\sum_{\alpha\in\gamma}\alpha$' en vez de '$\bigcup\gamma$'. Si f es una función de miembros de β para clases, y si γ tiene como miembros precisamente esas clases $f(x)$ tales que x es miembro de β, entonces se usa a veces la notación '$\prod_{x\in\beta}f(x)$' o '$\bigwedge_{x\in\beta}f(x)$' en vez de '$\bigcap\gamma$' y la notación '$\sum_{x\in\beta}f(x)$' o '$\bigvee_{x\in\beta}f(x)$' en vez de '$\bigcup\gamma$'.

55.4. La relación *p (producto lógico de* o *intersección de)* puede definirse como $\hat{\alpha}\hat{\gamma}[\alpha = \hat{x}(\beta)[\beta\in\gamma \supset x\in\beta]]$, y entonces puede considerarse la intersección $\bigcap\gamma$ como la clase que tiene la relación p con γ, es decir, como $p`\gamma$ (donde la notación es la de 64.43 y de [PM] * 30). Este procedimiento se usa en [PM] * 40. De modo similar, la relación s (*suma lógica* o *unión de*) puede definirse como $\hat{\alpha}\hat{\gamma}[\alpha = \hat{x}(\exists\beta)[\beta\in\gamma\,.\,x\in\beta]]$, y entonces puede considerarse la unión $\bigcup\gamma$ como la clase que tiene la relación s con γ, es decir, como $s`\gamma$. (Las letras '*p*' y '*s*' no sirven como metavariables en este parágrafo sino que son la notación real usada en [PM].)

56. Cálculo de individuos

56.1. El cálculo de individuos, formulado por primera vez en la mereología de Leśniewski (véase Sobociński XVIII 331), es análogo en algunos aspectos al cálculo de clases. Este cálculo trata sobre una relación parte-todo entre individuos, pero no tiene ningún elemento nulo (es decir, ningún elemento análogo a la clase vacía (51.4). Podemos partir de una relación indefinida de *discreción,* en términos de la cual se definen la relación parte-todo y la relación de solapación. La relación de discreción entre individuos es análoga a la relación de exclusión mutua entre clases, la relación parte-todo entre individuos es análoga a la relación de inclusión entre clases, y la relación de solapación entre individuos es análoga a la relación de solapación entre clase (véase también Leonard y Goodman V 113).

56.2. '$x \barwedge y$' significa que x e y son discretas (no tienen ninguna parte en común).

56.3. '$x \circ y$' se define como '$\sim[x \barwedge y]$' y significa que x solapa a y. Esto es, se dice que x e y se solapan si tienen una parte en común.

56.4. '$x < y$' se define como '$(z)[z \barwedge y \supset z \barwedge x]$' y significa que x es parte de y. Es decir, x es parte de y si todo lo que es discreto de y es también discreto de x.

56.5. '$x \ll y$' se define como '$x < y \,.\, x \neq y$' y significa que x es una parte propia de y. Es decir, $x \ll y$ si x es una parte de y y x no es idéntica a y.

56.6. El *individuo-suma* o *fusión* de una clase de individuos es análogo a la suma lógica de una clase de clases (55.2). El individuo que es la fusión de una clase α de individuos es el (menor) individuo que tiene como partes todos los miembros de α. Tal fusión o individuo-suma necesita ser continuo. Cada hombre puede considerarse como una parte del individuo-suma que es la humanidad. El universo U es la fusión de la clase de todos los individuos.

56.7. El *individuo-producto* o *núcleo* de una clase de individuos es análogo al producto lógico de una clase de clases (55.1). El individuo (si hay alguno) que es el núcleo de una clase α de individuos es el (mayor) individuo que es parte de todos los miembros de α. En el caso de que los miembros de α no tengan ninguna parte en común, no hay núcleo de α.

56.8. La negación $-x$ de un individuo x es la fusión de todos los individuos discretos de x. La suma $x + y$ de los individuos x e y es la fusión de la clase que tiene como únicos miembros a x y a y. El producto xy de individuos x e y es el núcleo de la clase que tiene como únicos miembros a x y a y. No existe un producto de este tipo si x e y no tienen ninguna parte en común.

CAPITULO 6

CALCULO DE RELACIONES

60. Propiedades de relaciones análogas a las propiedades de clases

60.1. INTRODUCCIÓN. Puede considerarse que las relaciones diádicas son un tipo especial de función proposicional de dos argumentos (05.9), así como las clases pueden considerarse como un tipo especial de función proposicional de un argumento. Una proposición que asevera que se mantiene una relación entre dos individuos puede considerarse alternativamente como una proposición que asevera que un par ordenado de individuos pertenece a una clase. En otras palabras, una relación (diádica) puede considerarse como una clase de pares ordenados. Adviértase que en este capítulo el término *relación* se reserva para relaciones diádicas, excepto en 67. En la primera edición de [PM] se desarrolla la teoría de relaciones (* 21) en estrecha analogía con la teoría de clases (50.4). En ella se consideran las relaciones como funciones proposicionales más que como clases de pares ordenados, y los pares ordenados mismos se consideran como relaciones de un tipo especial llamado *pares ordinales* (* 55). (Para métodos de representación de relaciones por medio de listas de pares, figuras de flechas y matrices de Schröder, véase, por ejemplo, Carnap 3523 (27, 28).)

60.2. VARIABLES, ABSTRACTOS Y CONSTANTES PARA RELACIONES

60.21. Los sistemas que tratan sobre relaciones emplean normalmente variables especiales que se refieren a las relaciones. En [PM], por ejemplo, 'R', 'S', 'P' y 'Q' se usan como tales variables, aunque parece haber

ahí una confusión entre tales variables y las variables que se usan con fines metalingüísticos (08.2-08.8).

60.22. En muchos sistemas, pueden formarse nombres de relaciones (diádicas) colocando dos variables encapuchadas '$\hat{x}$' e '$\hat{y}$' a la izquierda de una forma '$(\ldots x \ldots y \ldots)$', proporcionando una expresión '$\hat{x}\hat{y}(\ldots x \ldots y \ldots)$' llamada *abstracto* (*doble*) (40.7, 51.2). Esta notación aparece en [PM], [R], y [Q]. En [Q] 202 y en [R] 287 se dan formas de definir tales abstractos. En [F] 167 se usa la notación '$(xy \backslash (\ldots x \ldots y \ldots))$' en vez de '$\hat{x}\hat{y}(\ldots x \ldots y \ldots)$'.

60.23. La relación *universal* (entre individuos) es la relación que relaciona a todo individuo con todo individuo. Puede denotarse mediante '$\dot{V}$', donde '$\dot{V}$' puede definirse como '$\hat{x}\hat{y}[[x = x] . [y = y]]$', siendo '$x$' e '$y$' variables para individuos ([PM] * 25). Si deseamos indicar el tipo mediante un suscrito, podría usarse la notación '$V_{o\iota\iota}$' en lugar de '$\dot{V}$' (32). También puede usarse la notación '$\dot{V}$' para la relación universal de cualquier tipo superior. Por ejemplo, la relación universal entre objetos de tipo *a* podría expresarse por '$\dot{V}$' o por '$\hat{x}\hat{y}[[x = x] \cdot [y = y]]$' donde '$x$' e '$y$' son variables de tipo *a*. Si el tipo debe indicarse explícitamente, usaríamos 'V_{oaa}' en lugar de '$\dot{V}$'. Un modo alternativo de definir '$\dot{V}$' es como '$\hat{x}\hat{y}\curlyvee$' (cp. 12.7). Si no se usa ninguna teoría de tipos, es posible suponer que existe una relación universal que relaciona todas las entidades cualesquiera que sean con otra, y no precisamente las entidades que pertenecen a un tipo especificado; en [F] 181 esta relación se expresa mediante '$\cup^2$' o '$\cup \times \cup$'.

60.24. La relación *vacía* (entre individuos) es la relación que no relaciona a ningún individuo. Puede denotarse por '$\dot{\Lambda}$', donde '$\dot{\Lambda}$' puede definirse como '$\hat{x}\hat{y}[[x \neq x] . [y \neq y]]$', siendo '$x$' e '$y$' variables para individuos ([PM] * 25). Si queremos indicar el tipo mediante un suscrito (32), podría usarse la notación '$\Lambda_{o\iota\iota}$' en vez de '$\dot{\Lambda}$'. También puede usarse la notación '$\dot{\Lambda}$' para la relación vacía de cualquier tipo superior. Por ejemplo la relación vacía entre objetos de tipo *a* podría expresarse por '$\dot{\Lambda}$' o por '$\hat{x}\hat{y}[[x \neq x] \cdot [y \neq y]]$' donde '$x$' e '$y$' son variables de tipo *a*. Si el tipo debe indicarse explícitamente usaríamos 'Λ_{oaa}' en vez de '$\dot{\Lambda}$'. Un modo alternativo de definir '$\dot{\Lambda}$' es como '$\hat{x}\hat{y}\curlywedge$' (cp. 12.7). Si no se usa ninguna teoría de tipos es posible suponer que existe una relación vacía que no relaciona ninguna entidad y que es el complemento (60.52) de la relación universal mencionada al final de 60.23.

60.3. Notación para pares ordenados y relaciones

60.31. El par ordenado que consta de a y b, con a como primer miembro y b como segundo miembro, se expresa mediante '$a;b$' en [Q] 198, mediante '$\langle a, b\rangle$' en [R] 280, y mediante '(a, b)' en [F] 84. En [F] se omite con frecuencia la coma. Estas notaciones para pares ordenados se emplean por los anteriores autores en el manejo de las relaciones como clases de tales pares ordenados. Por otra parte, [PM] no tiene ninguna notación en este sentido para pares ordenados, ya que en [PM] no se consideran las relaciones como clases de pares ordenados; pero los llamados pares ordinales son estrechamente análogos a los pares ordenados y se definen como relaciones de tipo especial (64.24, [PM] * 55). Véase también 64.26.

60.32. Según la definición de [Q] 206 y la definición equivalente de [R] 287, '$\hat{x}\hat{y}(\ldots x\ldots y\ldots)$' designa la clase de todos los pares ordenados $\langle a, b\rangle$ tales que $(\ldots a\ldots b\ldots)$, y esta clase de pares ordenados se considera como la relación de a con b tal que $(\ldots a\ldots b\ldots)$. En [F] 167 se toma un punto de partida similar, pero la notación '$(xy \setminus (\ldots x\ldots y\ldots))$' reemplaza a '$\hat{x}\hat{y}(\ldots x\ldots \ldots y\ldots)$'.

60.33. Para enunciar que x e y están en relación R, la notación de [PM] * 21 es 'xRy'. Esta es esencialmente también la notación de [R] 286 y [F] 88; seguiremos esta notación. [Q] 200 escribe '$R(x, y)$'. En el caso de aquellos autores que consideran las relaciones como clases de pares ordenados, existen como alternativas de 'xRy' notaciones que incluyen pares ordenados. Así tenemos '$x;y \in R$' en [Q] 198 (pero véase D24 en [Q] 200), '$R(\langle x, y\rangle)$' en [R] 281, y '$(xy) \in R$' o '$R(xy)$' en [F] 90, 91. '$R(xy)$' es equivalente a '$[xRy]$' o a 'xRy' según una regla general de [F] 87 según la cual '$[bac]$' es la abreviación de '$a(bc)$'.

60.34. En [PM] * 25.03 se usa la notación '$\exists ! R$' para expresar la no vaciedad de la relación R, es decir, el hecho de que R relaciona uno o más objetos. Esta notación para las relaciones es análoga a la de '$\exists ! \alpha$' para clases (52.3).

60.4. Funciones de relaciones para proposiciones

60.41. Correspondiendo a cada función de clases para proposiciones expuesta en 53 existe una función análoga de relaciones para proposiciones. Las definiciones son las siguientes:

60.42. '$R \subset S$' puede considerarse equivalente a '$(x)\,(y)[xRy \supset xSy]$' (53.2) y que expresa que R está *relacionalmente incluida* en S o que R es una *subrelación de S*. (Véase también 66.05).

60.43. '$R \subseteq S$' puede escribirse en vez de '$R \subset S$', reservando '$\subset$' para la relación de *subrelación propia* entre relaciones (cp. 53.3). Pero este uso no se sigue ni en este Diccionario ni en [PM].

60.44. '$R = S$' puede considerarse equivalente a '$(x)\,(y)[xRy \equiv xSy]$'. (Cp. 53.4.)

60.45. '$R \neq S$' puede considerarse equivalente a '$\sim [R = S]$'. (Cp. 53.5.)

60.46. [PM] $*$ 23.01 usa '$\Subset$' en lugar de '$\subset$' (60.42). Similarmente [F] 185, 189 usa '$\subseteq_r$' y '$\simeq_r$' en lugar de '$\subseteq$' y '$\simeq$' respectivamente (53.3, 53,4) cuando se trata con relaciones en vez de con clases.

60.5. Funciones de relaciones para relaciones

60.51. Correspondiendo a cada función de clases para clases expuestas en 54 existe una función análoga de relaciones para relaciones. Algunas de las más familiares son las siguientes:

60.52. La relación entre x e y tal que x no mantiene la relación R con y se denomina *complemento* (*relacional*) de la relación R, y se expresa mediante '$\breve{-}R$'. Podemos considerar '$\breve{-}R$' como equivalente a '$\hat{x}\hat{y}(\sim [xRy])$'. A veces se escribe '$\bar{R}$' para expresar '$\breve{-}R$'. (Cp. 54.2.)

60.53. La relación de x con y tal que x mantiene la relación R con y y x mantiene la relación S con y se denomina *intersección* (*relacional*) o *producto lógico* de la relación R con la relación S y se expresa mediante '$R \cap S$'. Podemos considerar '$R \cap S$' como equivalente a '$\hat{x}\hat{y}[xRy \,.\, xSy]$'. (Cp. 54.3.) '$R \cap \breve{-}S$' puede servir como una abreviación de '$R \cap \breve{-}S$'. (Cp. 54.51.)

60.54. La relación de x con y tal que x mantiene la relación R con y o x mantiene la relación S con y se denomina *unión* (*relacional*) o *suma lógica* de la relación R con la relación S y se expresa mediante '$R \cup S$'. Podemos considerar '$R \cup S$' como equivalente a '$\hat{x}\hat{y}[xRy \vee xSy]$'. (Cp. 54.4.)

60.55. [PM] ($*$ 23) escribe '$\dot{-}$', '$\dot{\cap}$' y '$\dot{\cup}$' para '$\breve{-}$', '$\cap$' y '$\cup$' respectivamente.

60.56. Otras funciones que son de relaciones para relaciones, pero que no tienen análogos en el cálculo de clases, se dan a continuación en 61.

60.6. Funciones de clases de relaciones para relaciones

60.61. Si α es una clase de relaciones, entonces la *intersección relacional* (o *producto relacional lógico*) de la clase de relaciones α se define como la relación que relaciona cada par que está relacionado por cada miembro de α (cp. 55.1). La intersección relacional de la clase de relaciones α puede denotarse por '$\bigcap\alpha$' que puede considerarse como equivalente a '$\hat{x}\hat{y}(S)[S \in \alpha \supset xSy]$'.

60.62. Si α es una clase de relaciones, entonces la *unión relacional* (o *suma relacional lógica*) de la clase de relaciones α se define como la relación que relaciona cada par que está relacionado por un miembro de α por lo menos (cp. 55.2). La unión relacional de la clase de relaciones α puede denotarse mediante '$\bigcup\alpha$' que puede considerarse como equivalente a '$\hat{x}\hat{y}(\exists S)[S \in \alpha \cdot xSy]$'.

60.63. La relación *p, intersección relacional,* puede definirse como $\hat{R}\hat{\alpha}[R = \hat{x}\hat{y}(S)[S \in \alpha \supset xSy]]$, y la intersección relacional de α, $\bigcap\alpha$, puede considerarse entonces como la relación que mantiene la relación p con α, es decir, como $p`\alpha$ (donde la notación es la de 64.3 y la de [PM] * 30). De modo similar *ṡ, unión relacional,* puede definirse como $\hat{R}\hat{\alpha}[R = \hat{x}\hat{y}(\exists S)[S \in \alpha \cdot xSy]]$, y $\bigcup\alpha$ puede considerarse como la relación que mantiene la relación s con α, es decir, como $s`\alpha$ (cp. 55.4). (Las letras '*p*' y '*s*' no sirven como metavariables en este parágrafo sino que son la notación real usada en [PM].)

61. Funciones de relaciones para relaciones que son propias del cálculo relacional

61.1. Existen algunas funciones de relaciones para relaciones que no tienen análogas entre las funciones de clases para clases. Las definiciones de algunas de éstas son las siguientes:

61.2. '$\breve{R}$' puede definirse como '$\hat{x}\hat{y}[xRy]$' ([PM] * 31). A veces se usa la notación '$\breve{}R$' en vez de '$\breve{R}$'. La relación $\breve{R}$ se denomina *conversa* de R. La relación $\breve{R}$ relaciona y con x si y sólo si la relación R relaciona x con y. Una relación R es simétrica si $\breve{R} \subset R$. Una relación R es asimétrica si

$\breve{R} \subset -\breve{R}$. La relación *similar a* es un ejemplo de una relación simétrica; la relación *mayor que* es un ejemplo de una relación asimétrica. (Ver 65.1.)

61.3. $`R|S`$ puede definirse como $`\hat{x}\hat{y}(\exists z)[xRz \,.\, zSy]`$ ([PM] * 34). La relación $R|S$ se denomina *producto relativo* de R y S. Sea R *deudor de* y S *hijo de.* Entonces x tiene la relación $R|S$ con y si x es el deudor de un hijo de y, es decir, si existe al menos un z tal que x es un deudor de z y z es un hijo de y. El producto relativo satisface la ley asociativa, por lo que $[P|Q]|R = P|[Q|R]$. En consecuencia, $`P|Q|R`$ se usa amenudo como una abreviación de $`[P|Q]|R`$ (16.5, [PM] * 34.22). Schröder (III 29) usó ';' en lugar de '|'.

61.4. $`R\dagger S`$ puede definirse como $`\hat{x}\hat{y}(z)[xRz \vee zSy]`$ (Peirce 4541). La relación $R\dagger S$ se denomina *suma relativa* de R y S. Ya que puede demostrarse que la relación $\hat{x}\hat{y}[\sim[zSy] \supset [xRz]]$ es equivalente a $R\dagger S$, la relación $R\dagger S$ relaciona a x con y siempre que x tenga la relación R con todo individuo que no tenga la relación S con y. De modo similar, la relación $R\dagger\bar{S}$ relaciona a x con y siempre que x tenga la relación R con todos los individuos que tengan la relación S con y. Schröder (III 29) usa '$\dotplus$' en vez de '$\dagger$'.

61.5. La potencia (relativa) particular de una relación R puede definirse así:

$`R^{1}`$ puede definirse como $`R`$,
$`R^{2}`$ puede definirse como $`R|R`$ ([PM] * 34.02),
$`R^{3}`$ puede definirse como $`R^{2}|R`$ ([PM] * 34.03),

y así sucesivamente, para potencias (relativas) de R enteras sucesivamente superiores. (Para una definición general de *potencias (relativas)* de R véase [PM] * 301.) Si R es *padre de,* R^2 es *abuelo de,* R^3 es *bisabuelo de,* y así sucesivamente. A veces se incluye la *potencia cero* entre las potencias de R y $`R^{0}`$ puede definirse como $`I\restriction C'R`$ (25.1, 62.4, 63.8, 64.13, 66.12), por lo que R^0 es la relación de identidad entre objetos relacionados por R. Pero en [Q] 253 la relación R^0 se define como la relación misma de identidad, I. (Véase 08.9 con respecto a 'I' y 'C'.)

61.6. $`R^{-1}`$, $`R^{-2}`$, $`R^{-3}`$, ..., se escriben a veces (F 182) para $`\breve{R}`$, $`(\breve{R})^{2}`$, $`(\breve{R})^{3}`$, y así sucesivamente. Además de las potencias enteras de R y de las potencias enteras negativas de R, se han definido a veces las potencias reales y racionales de R. (Véase *Journal of Symbolic Logic,* Vol. 14 (1949), pp. 81-84.)

61.7. Una relación R es transitiva si $R^2 \subset R$. Más intuitivamente, se dice que una relación R es transitiva siempre que R se cumple entre a y c cuando se cumple entre a y b y entre b y c. Por ejemplo, la relación *más viejo que* es transitiva. La clase de las relaciones transitivas se denota a veces mediante 'trans' ([PM] * 201). Una relación R es compacta si $R \subset R^2$. Otra vez, más intuitivamente, se dice que una relación R es compacta si cuando R se cumple entre a y b, hay algún c tal que R se cumple entre a y c, y R se cumple entre c y b. La relación *mayor que* entre los números racionales es compacta.

62. Funciones de clases para relaciones, o de clases y relaciones para relaciones

62.1. $`(\alpha \uparrow \beta)$ puede definirse como $`(\hat{x}\hat{y}[x \in \alpha . y \in \beta])$ ([PM] * 35.04). $\alpha \uparrow \beta$ es la relación que relaciona cada miembro de α con cada miembro de β. Si α es la clase de los varones y β es la clase de las hembras, entonces $\alpha \uparrow \beta$ es la relación que cada varón tiene con cada hembra. La relación $\alpha \uparrow \beta$ puede considerarse como la relación universal con su dominio restringido a α y su dominio converso restringido a β. (Para el concepto de relación universal, véase 60.23. Para los conceptos de dominio y dominio converso, véase 63.6 y 63.7.)

62.2. En [R] 283 y [F] 180 se usa $`(\alpha \times \beta)$ en vez de $`(\alpha \uparrow \beta)$. Este modo de definir $`(\alpha \times \beta)$ es consistente con 54.6, si se consideran las relaciones como clases de pares ordenados (60.1), porque entonces $`(\alpha \uparrow \beta)$ denotaría el producto cartesiano (en el sentido de 54.6) de α con β. En [F] 180 la expresión $`([\alpha^2])$ es una abreviación de $`(\alpha \times \alpha)$, y $`([\alpha^3])$ es una abreviación de $`([\alpha^2] \times \alpha)$, y así sucesivamente. Podemos considerar $[\alpha^2]$ como la relación universal con su campo restringido a α. (Para el concepto de campo, ver 63.8).

62.3. $`(\alpha \restriction R)$ puede definirse como $`(\hat{x}\hat{y}[xRy . x \in \alpha])$ ([PM] * 35.01). Podemos hablar de $\alpha \restriction R$ como la relación R con su dominio restringido a α. Por ejemplo, sea R la relación *progenitor de*, α la clase de los *varones*, y β la clase de las *hembras*. Entonces $\alpha \restriction R$ es la relación *padre de*, y $\beta \restriction R$ es la relación *madre de*.

62.4. $`(R \upharpoonright \beta)$ puede definirse como $`(\hat{x}\hat{y}[xRy . y \in \beta])$ ([PM] * 35.02). Podemos hablar de $R \upharpoonright \beta$ como la relación R con su dominio converso restringido a β. Según el ejemplo de 62.3, $R \upharpoonright \beta$ es la relación *progenitor con hija*.

62.5. $\text{`}\alpha \restriction R \upharpoonright \beta\text{'}$ puede definirse como $\text{`}\hat{x}\hat{y}[xRy . x \in \alpha . y \in \beta]\text{'}$ ([PM] * 35.03). Podemos hablar de $\alpha \restriction R \upharpoonright \beta$ como la relación R con su dominio restringido a α y su dominio converso restringido a β. Según el ejemplo de 62.3, $\alpha \restriction R \upharpoonright \beta$ es la relación *padre con hija.*

62.6. $\text{`}R \downharpoonright \alpha\text{'}$ puede definirse como $\text{`}\hat{x}\hat{y}[xRy . x \in \alpha . y \in \alpha]\text{'}$ ([PM] * 36.01). Podemos hablar de $R \downharpoonright \alpha$ como la relación R con su campo restringido a α. Según el ejemplo de 62.3, $R \downharpoonright \alpha$ es la relación *padre con hijo.*

62.7. Las definiciones siguientes son equivalentes a las dadas en los parágrafos 62.3 a 62.6.

62.71. $\text{`}\alpha \restriction R\text{'}$ puede definirse como $\text{`}R \cap [\alpha \uparrow V]\text{'}$ o como $\text{`}R \cap [\alpha \times V]\text{'}$.

62.72. $\text{`}R \upharpoonright \beta\text{'}$ puede definirse como $\text{`}R \cap [V \uparrow \beta]\text{'}$ o como $\text{`}R \cap [V \times \beta]\text{'}$.

62.73. $\text{`}\alpha \restriction R \upharpoonright \beta\text{'}$ puede definirse como $\text{`}R \cap [\alpha \uparrow \beta]\text{'}$ o como $\text{`}R \cap [\alpha \times \beta]\text{'}$.

62.74. $\text{`}R \downharpoonright \alpha\text{'}$ puede definirse como $\text{`}R \cap [\alpha \uparrow \alpha]\text{'}$ o como $\text{`}R \cap [\alpha^2]\text{'}$.

63. Funciones de relaciones para clases

63.1. Las funciones que se consideran aquí son funciones de relaciones, o de relaciones e individuos, o de relaciones y clases, para clases. La notación de [PM] para tales funciones combina usualmente la notación para relaciones de tipo superior, tales como la notación $\text{`}R\text{'}$ (66.08, [PM] * 32.13), con el apóstrofo usado en relación con funciones descriptivas (64.42, [PM] * 30). Así la notación $\text{`}R\text{`}y\text{'}$ en [PM] se usa para denotar la clase de objetos que tienen la relación R con y. La discusión detallada de estas relaciones de tipo superior se encontrará en la sección 66.

63.2. $\text{`}R\text{``}\alpha\text{'}$ puede definirse como $\text{`}\hat{x}(\exists y)[xRy . y \in \alpha]\text{'}$ ([PM] * 37.01). $R\text{``}\alpha$ es la clase de aquellas entidades que tienen la relación R con los miembros de α. En [Q] 209 se menciona $R\text{``}\alpha$ como el *mapa* o *proyección* de $\alpha$ por $R$. [PM] denomina a $R\text{``}\alpha$ *función plural descriptiva* para oponerla a las funciones proposicionales, aunque indicando alguna analogía con las llamadas funciones descriptivas (singulares) ([PM] * 30, ver 64.43). (Más exactamente, quizás, hablaríamos de descripciones funcionales plurales en vez de funciones descriptivas plurales). Por ejemplo, sea R la relación *progenitor de.* Entonces $R\text{``}\alpha$ es la clase de los progenitores de los miembros de α.

63.3. Puede demostrarse que $\breve{R}$"α (63.2) es lo mismo que la clase $\hat{y}(\exists x)$ $[xRy \,.\, x \in \alpha]$ ([Q] 212). Esta clase puede denominarse *retroyección* de α por R ([Q] 212). Según el ejemplo de 63.2, $\breve{R}$"α es la clase de los hijos de los miembros de α.

63.4. Ya que $\{y\}$ es la clase unitaria cuyo único miembro es y (64.2), R"$\{y\}$ (63.2) es la clase de los *predecesores* R de y, es decir, la clase de los objetos que tienen la relación R con y. Otras notaciones equivalentes a $`R"\{y\}'$ son $`\breve{R}`y'$ (64.42, 66.08, [PM] * 32.13), $`\hat{x}[xRy]'$ (51.2), $`R"\iota y'$ ([Q] 212), y $`R > y'$ (Feys XV 71). Según el ejemplo de 63.2, R"$\{y\}$ es la clase de los progenitores de y.

63.5. Ya que $\{x\}$ es la clase unitaria cuyo único miembro es x (64.2), $\breve{R}$"$\{x\}$ es la clase de los *sucesores* R de x, es decir, la clase de entidades con las que x mantiene la relación R. Otras notaciones equivalentes a $`\breve{R}"\{x\}'$ son $`R`x'$ (66.09, [PM] * 32.131), $`\breve{R}"\iota x'$ ([Q] 213), $`\hat{y}[xRy]'$ (51.2), y $`R < x'$ (Feys XV 71). (En la notación combinatoria de 41, una notación equivalente sería simplemente $`Rx'$.) Según el ejemplo de 63.2, $\breve{R}$"$\{x\}$ es la clase de los hijos de x.

63.6. La clase R"V es lo mismo que la clase $\hat{x}(\exists y)[xRy]$ ([Q] 212). R"V es la clase de todos los predecesores R, es decir, la clase de todas las entidades que tienen la relación R con algún otro objeto. R"V se denomina *dominio* de R. Otras notaciones equivalentes a $`R"V'$ son $`(\mathrm{Dm}\ R)'$ ([*F*] 179) y $`D`R'$ ([PM] * 33.4 ff.; ver 66.11). Según el ejemplo de 63.2, R"V es la clase de los progenitores.

63.7. La clase $\breve{R}$"V es lo mismo que la clase $\hat{y}(\exists x)\,[xRy]$ ([Q] 213). $\breve{R}$"V es la clase de todos los sucesores R, es decir, la clase de todas las entidades con las que algún objeto tiene la relación R. $\breve{R}$"V se denomina *codominio* de R o *dominio converso* de R. Otras notaciones equivalentes a $`\breve{R}"V'$ son $`(\mathrm{Cndm}\ R)'$ ([F] 179) y $`\mathrm{C}`R'$ ([PM] * 33.111; ver 66.11). Según el ejemplo de 63.2, $\breve{R}$"V es la clase de los hijos.

63.8. La clase $[R \cup \breve{R}]"V$ es la misma clase que $\hat{x}(\exists y)\,[xRy \vee yRx]$. Esta clase se denomina *campo* de R; es la clase de todas las entidades que tienen la relación R con algún otro objeto o con las que algún otro objeto tiene la relación R. Otras notaciones equivalentes a $`[R \cup \breve{R}]"V'$ son $`(\mathrm{Fld}\ R)'$ ([F] 179) y $`C`R'$ ([PM] * 33.112; ver 66.12). Según el ejemplo de 63.2, $[R \cup \breve{R}]"V$ es la clase de todos los progenitores y todos los hijos. (Ver 08.9 con respecto a '*C*'.)

63.9. $`R``\alpha`$ puede definirse como $`\hat{x}(y)[y \in \alpha \supset xRy]`$. Esta notación sugerida por Feys XV 71, denota la clase de los individuos que tienen la relación $R$ con todos los miembros de $\alpha$. Una notación equivalente a $`R``\alpha`$ es $`p`\breve{R}``\alpha`$ ([PM] * 40.51; ver 66.02). Si $R$ es la relación *menor que* entre números, $R``\alpha$ es la clase de los números que son menores que todo número de α. (Ver 08.9 con respecto a *'p'*.)

64. Identidad y nociones derivadas de la identidad

64.1. Identidad

64.11. El símbolo *'I'*, ya introducido en 25.1, se usa con frecuencia para denotar la relación de *identidad* ([PM] * 50.01; [Q] 229; [R] 322). Para la distinción en [Q] entre '=' y *'I'* ver [Q] 230. En lógica combinatoria se usa con frecuencia el símbolo 'Q' para denotar identidad, como en 42.2 y en [CF] 241. (El uso de *'I'* para denotar identidad no debe confundirse con el uso del combinador 'I' en lógica combinatoria (45.1). De modo similar para el símbolo *'J'* que se expone a continuación.)

64.12. El símbolo *'J'* se usa con frecuencia para denotar la relación de *no-identidad* (llamada a veces *diversidad*). Podemos considerar *'J'* como una abreviación de *'— I'* ([PM] * 50.02).

64.13. $`R^0`$ puede definirse como $`I \restriction [[R \cup \breve{R}]``V]`$ (Carnap 3523, 38). R^0 es identidad dentro del campo de R (63.8); puede considerarse como la *potencia cero* de R. Si razonamos, por ejemplo, sobre la relación R de ser de color semejante, es útil con frecuencia considerar la identidad únicamente entre cosas que tiene color (es decir, sólo entre miembros del campo de R) en vez de considerar la relación de identidad también entre cosas que no tienen color. (Por otra parte, en [Q] 253, la relación misma de identidad, I, se considera como R^0 (cp. 61.5).) (Ver 08.9 con respecto a *'I'*.)

64.14. Una relación R es *reflexiva* si $R^0 \subset R$ (Carnap 3523, 40), es decir, si relaciona a cada objeto que está en el campo de R consigo mismo (63.8). Una relación R es *totalmente reflexiva* si $I \subset R$ (Carnap 3523, 40). La relación de ser de color semejante es una relación reflexiva, pero no totalmente reflexiva. La relación de autoidentidad es totalmente reflexiva. La relación de ser de color semejante no es totalmente reflexiva ya que hay muchos objetos, tales como los números, que no tienen ningún color y por tanto ninguna semejanza de color, incluso con ellos mismos.

64.15. Una relación R es *conectada* si $[J]\downarrow[[R \cup \breve{R}]\text{“}V]] \subset [R \cup \breve{R}]$ (Carnap 3523, 65). Es decir, una relación R es conectada si para todo par x, y del campo de R tal que x no es idéntico a y, o x tiene la relación R con y o y tiene la relación R con x (o ambos). La expresión 'connex' se emplea con frecuencia para denotar la clase de las relaciones conectadas ([PM] * 202.01). La precedencia entre números es una relación conectada ya que si x e y son dos números diferentes (dos miembros diferentes del campo de la relación en cuestión), entonces x precede a y o y precede a x.

64.2. Clase unitaria

64.21. $\text{`}\{y\}\text{'}$ puede definirse como $\text{`}\hat{x}[xIy]\text{'}$ o equivalentemente como $\text{`}\hat{x}[x = y]\text{'}$ ([F] 104). $\{y\}$ es la clase de las entidades idénticas a y. Esta clase tiene a y como su único miembro y por eso se llama *clase unitaria*. Ordinaraimente y e $\{y\}$ no deben identificarse: si y es Rubens, $\{y\}$ no es Rubens sino la clase que tiene a Rubens como único miembro. (En [Q] 135 la clase $\{y\}$ se identifica con y mismo si y es un individuo en el sentido de Quine.) Otras notaciones equivalentes a $\text{`}\{y\}\text{'}$ son $\text{`}\iota\text{`}y\text{'}$ ([PM] * 51.01; ver 64.42), $\text{`}\imath y\text{'}$ ([Q] 189), $\text{`}I > y\text{'}$ (según 63.4) y $\text{`}Qy\text{'}$ (41.4). (Ver 08.9 con respecto a *'I'*.)

64.22. $\text{`}\{x, y\}\text{'}$ puede definirse como $\text{`}\{x\} \cup \{y\}\text{'}$ ([R] 249). Por tanto $\{x, y\}$ es la clase que es la unión (54.4) de las clases unitarias $\{x\}$ e $\{y\}$, por lo que es la clase que tiene a x y a y como sus únicos miembros. Adviértase que $\{x, x\}$ es la misma clase que $\{x\}$. A veces $\{x, y\}$ se denomina *par no ordenado* ([F] 105) o *par cardinal* ([PM] * 54) de x e y. Una notación alternativa es $\text{`}\iota\text{`}x \cup \iota\text{`}y\text{'}$ ([PM] * 54).

64.23. De modo similar, $\text{`}\{x, y, z\}\text{'}$ puede definirse como $\text{`}\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}\text{'}$, y $\text{`}\{x, y, z, w\}\text{'}$ puede definirse como $\text{`}\{x\}\cup\{y\}\cup\{z\}\cup\{w\}\text{'}$, y así sucesivamente. Así $\text{`}\{x, y, z\}\text{'}$ es la clase que tiene a x, y y z como sus únicos miembros.

64.24. $\text{`}z{\downarrow}w\text{'}$ puede definirse como $\text{`}\{z\}{\uparrow}\{w\}\text{'}$ (62.1, [PM] * 55.01). Así $z{\downarrow}w$ es la relación que se da sólo de z a w. Esta relación $z{\downarrow}w$ se denomina *par ordinal* de z y w. Adviértase que $z{\downarrow}w$ es una relación, mientras los pares de 60.31, escritos como $\text{`}w;z\text{'}$ o $\text{`}\langle w, z\rangle\text{'}$ o $\text{`}(w, z)\text{'}$ no son relaciones pero pueden considerarse como miembros de relaciones si se consideran las relaciones como clases de pares ordenados (60.1). (Ver también 64.26.)

64.25. Para las notaciones '$R''\{y\}$' y '$\breve{R}''\{x\}$' ver 63.4 y 63.5.

64.26. La notación de *par* o *par ordenado* '$\langle a, b\rangle$' es definida por Wiener (2381) como '$\{\{a\}, \{a, b\}\}$'. Así un par ordenado puede definirse como una clase cuyos únicos miembros son la clase unitaria de a y el par no ordenado $\{a, b\}$. (Ver también 60.3.)

64.3. Relaciones uno-varios, varios-uno, y uno-uno

64.31. Una relación R es *uno-varios* si nunca relaciona dos objetos diferentes con algún objeto. La clase de las relaciones uno-varios se simboliza mediante '$1 \rightarrowtail \mathrm{Cls}$' en [PM] * 71, y '$1 \rightarrow \mathrm{Cls}$' puede considerarse como una abreviación de '$\hat{R}(x)(y)(z)[[xRz \,.\, yRz] \supset x = y]$' en virtud de [PM] * 71.17. (Realmente en [PM] * 70 se define en primer lugar una noción más general representada por '$\alpha \rightarrow \beta$', y después se consideran los conceptos representados por '$1 \rightarrow \mathrm{Cls}$', '$\mathrm{Cls} \rightarrow 1$' y '$1 \rightarrow 1$' como casos especiales del concepto general, donde, de acuerdo con [PM] * 20.03, 'Cls' significa la clase de todas las clases de algún tipo determinado.)

64.32. Una relación R es *varios-uno* si nunca relaciona cualquier objeto con dos objetos diferentes. La clase de las relaciones varios-uno se simboliza mediante '$\mathrm{Cls} \rightarrowtail 1$' en [PM] * 71 y '$\mathrm{Cls} \rightarrow 1$' puede considerarse como una abreviación de '$\hat{R}(x)(y)(z)[[xRy \,.\, xRz] \supset y = z]$' en virtud de [PM] * 71.171. Una relación es varios-uno (uno-varios) si y sólo si su conversa es uno-varios (varios-uno) ([PM] * 71.21).

64.33. Una relación R es *uno-uno* si es a la vez uno-varios y varios-uno. La clase de las relaciones uno-uno se simboliza mediante '$1 \rightarrowtail 1$' en [PM] * 71, y '$1 \rightarrow 1$' puede considerarse como una abreviación de '$[1 \rightarrowtail \mathrm{Cls}] \cap [\mathrm{Cls} \rightarrowtail 1]$' en virtud de [PM] * 71.04. Una relación es uno-uno si tanto ella como su conversa son uno-varios.

64.4. Relaciones asociadas a funciones

64.41. Toda función f da lugar a una relación uno-varios R que relaciona cada valor de f con el argumento o argumentos para los que f tiene ese valor. Digamos que R es la relación uno-varios *asociada a* la función f. Dado un enunciado acerca de la función f, habrá algún enunciado equivalente acerca de la relación uno-varios asociada R, y viceversa.

64.42. En algunos sistemas de lógica, tales como [PM], las únicas funciones consideradas son las funciones proposicionales, y así los enun-

ciados aparentemente sobre funciones no-proposicionales se consideran como enunciados acerca de la relación uno-varios asociada a estas funciones (ya que las relaciones, o relaciones mismas, pueden considerarse como funciones proposicionales (05.9)). Por tanto si f es una función no-proposicional que tiene la relación uno-varios R asociada, escribimos $`R`a'$ en [PM] en vez de $`f(a)'$ y consideramos $`R`a'$ como una abreviación de $`(\iota x)[xRa]'$ (ver 26 y [PM] * 30.01). Por tanto $`R`a'$ denota el objeto que tiene la relación R con a, y por ello denota el mismo objeto que $`f(a)'$. Este procedimiento para representar funciones no-proposicionales por medio de sus relaciones asociadas sólo es aplicable cuando las relaciones asociadas son definibles en el sistema de lógica en cuestión. En [PM] las relaciones requeridas son siempre definibles.

64.43. Las expresiones de la forma $`R`a'$ se denominan a veces *funciones descriptivas* ([PM] * 30); pero ya que estas expresiones son nombres de valores de funciones (o al menos actúan como expresiones variables si $`a'$ es una variable) parecería mejor llamar a estas expresiones *descripciones funcionales* y considerarlas como un tipo especial de descripción definida (26), lo cual son realmente.

64.44. Todas las consideraciones que se aplican a las descripciones definidas se aplican también naturalmente a las descripciones funcionales, incluyendo aspectos relativos al alcance. En el sistema de [PM] si puede probarse $`\mathrm{E}!R`x'$, entonces la extensión del alcance de $`R`x'$ no hace ninguna diferencia. (Véase 26.5 y [PM] * 30.) Aquí $`\mathrm{E}!R`x'$ significa que el "R de x" existe únicamente, es decir, que hay uno y sólo un objeto que tiene la relación R con x. Si puede probarse $`\mathrm{E}!R`x'$ en [PM], entonces $`R`x'$ actúa como un nombre en [PM]. El siguiente enunciado es lógicamente equivalente a la afirmación de que R es uno-varios: $(x)\,[xRy \supset \mathrm{E}!R`y]$.

64.45. En [PM] * 37.04 la notación $`\mathrm{E}!!R``\alpha'$ se usa como una abreviación de $`(x)[x \in \alpha \supset \mathrm{E}!R`x]'$. Podemos leer $`\mathrm{E}!!R``\alpha'$ como aseverando que la R de cada miembro de α existe únicamente o que hay uno y sólo un objeto, para cada miembro de α, que tiene la relación R con ese miembro de α.

64.46. La relación ι puede definirse como la relación que relaciona cada clase unitaria con el único miembro de esa clase unitaria, por tanto 'ι' puede considerarse como una abreviación de $`\hat{\alpha}\hat{x}[\alpha = \{x\}]'$. Esta relación es especialmente relevante para la teoría de descripciones definidas, y

la descripción funcional, 'ι'a', puede usarse como una notación alternativa de '$\{a\}$' para significar la clase cuyo único miembro es a (64.2). La conversa de ι puede escribirse como '$\breve{\iota}$' o como '$\imath$' y la descripción funcional, '$\imath$'α', denota el único miembro de α si α es una clase unitaria. De modo similar '$\imath$'$\hat{x}(\ldots x\ldots)$' denota el único objeto de la clase $\hat{x}(\ldots x\ldots)$, es decir, el objeto x que satisface la condición $(\ldots x\ldots)$ (con tal que sólo haya un objeto tal). Por tanto es claro que '$(\imath x)(\ldots x\ldots)$' tiene esencialmente la misma interpretación que '$\imath$'$\hat{x}(\ldots x\ldots)$', y esto indica por qué la iota invertida se usa en descripciones definidas tales como '$(\imath x)(\ldots x\ldots)$'. En [PM] * 51.01 el símbolo 'ι' se define como '$\vec{\iota}$'. (Ver 63.1, 64.1 y 66.08.) En [PM] la conversa de ι se denota por medio de '$\breve{\iota}$' en vez de mediante '$\imath$'.

65. Representación de funciones no-proposicionales por medio de sus relaciones asociadas

65.1. Muchos sistemas de lógica, incluido [PM], sólo pueden tratar formalmente de funciones proposicionales y no de otros tipos de funciones, es decir, no de funciones no-proposicionales. Sin embargo, afortunadamente estas otras funciones (por ejemplo, funciones de clases para clases) pueden representarse adecuadamente por medio de sus relaciones asociadas (64.42). Por ejemplo, la noción de *conversa* de una relación (61.2) es una función de relaciones para relaciones. En [PM] definimos la relación asociada Cnv como $\hat{R}\hat{S}[R=\breve{S}]$, y esta relación representa la función *conversa de*. La descripción funcional 'Cnv'S' denotaría entonces el valor de esta función cuando 'S' denota su argumento. La función misma no es realmente denotada por ninguna expresión, pero la relación asociada correspondiente es denotada por 'Cnv'. De modo similar, la función *dominio de* no es denotada por ninguna expresión, pero la relación asociada correspondiente $\hat{\alpha}\hat{R}[\alpha = \hat{x}(\exists y)[xRy]]$ es denotada en [PM] por el símbolo 'D'. Por tanto 'D'R' puede leerse como *el dominio de R*.

65.2. En general, si existe una función no proposicional tal que '$(\ldots a\ldots)$' denota el valor de la función si 'a' denota su argumento, entonces la relación asociada puede denotarse por medio de '$\hat{x}\hat{y}[x = (\ldots y\ldots)]$', y la última expresión puede abreviarse como '$\lambda_y(\ldots y\ldots)$', como en [Q] 226. Ya que en la conversión lambda '$\lambda y(\ldots y\ldots)$' denotaría la función misma (44), en sistemas como [Q], que carecen de una notación directa para funciones no proposicionales, la notación '$\lambda_y(\ldots y\ldots)$' puede usarse para denotar la relación asociada. Aquí '$(\lambda_y(\ldots y\ldots))$'$a$' tienen el papel desempe-

ñado por ‘$(\lambda y(\ldots y\ldots))\,a$’ en la conversión lambda, y tenemos $(\lambda_y(\ldots y\ldots))$‘$a = (\ldots a\ldots)$, así como tenemos $(\lambda y(\ldots y\ldots))\,a$ cnv $(\ldots a\ldots)$ en conversión lambda. Además, tenemos siempre ‘$\mathrm{E}!\lambda_y(\ldots y\ldots)$‘$a$’ como un teorema, ya que la relación asociada es uno-varios y no-vacía.

65.3. El método antes descrito para representar funciones no proposicionales por medio de sus relaciones asociadas es utilizable en sistemas como [PM] y [Q] solamente si los argumentos y valores de las funciones no proposicionales son ellos mismos funciones proposicionales de individuos; pero esta limitación no produce en la práctica ninguna dificultad, porque siempre podemos encontrar funciones no proposicionales correspondientes cuyos valores y argumentos, si no son individuales, son relaciones asociadas (de funciones no proposicionales) y por tanto proposicionales en vez de funciones no proposicionales.

65.4. En [PM] (* 38) se introducen abreviaciones del tipo siguiente

$$\begin{array}{lll} \text{‘}\alpha\cap\text{’} & \text{para} & \text{‘}\hat{\gamma}\hat{\beta}[\gamma = [\alpha\cap\beta]]\text{’}, \\ \text{‘}R\mid\text{’} & \text{para} & \text{‘}\hat{P}\hat{S}[P = [R\mid S]]\text{’}, \\ \text{‘}R\restriction\text{’} & \text{para} & \text{‘}\hat{S}\hat{\alpha}[S = [R\restriction\alpha]]\text{’}, \end{array}$$

y así sucesivamente. También

$$\begin{array}{lll} \text{‘}\cap\beta\text{’} & \text{para} & \text{‘}\hat{\gamma}\hat{\alpha}[\gamma = [\alpha\cap\beta]]\text{’}, \\ \text{‘}\mid R\text{’} & \text{para} & \text{‘}\hat{P}\hat{R}[P = [R\mid R]]\text{’}, \\ \text{‘}\restriction\alpha\text{’} & \text{para} & \text{‘}\hat{S}\hat{R}[S = [R\restriction\alpha]]\text{’}, \end{array}$$

y así sucesivamente. En general si ‘0’ es un símbolo que puede considerarse que representa una operación binaria, entonces ‘$0b$’ abrevia a ‘$\hat{x}\hat{y}[x = [y0b]]$’ y ‘$a0$’ abrevia a ‘$\hat{x}\hat{y}[x = [a0y]]$’. La ventaja de tal notación es que entonces podemos probar a la vez

$$a0\text{‘}b = [a0b]$$

y

$$0b\text{‘}a = [a0b]$$

donde ‘$a0$’ denota la relación asociada de la función que tiene el valor $a0b$ para el argumento b, y ‘$0b$’ denota la relación asociada de la función que tiene el valor $a0b$ para el argumento a. A veces para evitar ambigüedad usamos ‘$(a0)$’ en vez de ‘$a0$’.

65.5. Combinando los métodos de abreviación descritos en 65.2 y 65.4, podríamos considerar $\hat{}0b\check{}$ como una abreviación de $\hat{}\lambda_y[y0b]\check{}$ y $\hat{}a0\check{}$ como una abreviación de $\hat{}\lambda_y[a0y]\check{}$, pero [PM] (* 38) no usa esta notación lambda.

65.6. Si R es la relación $a0$ de 65.4 y 65.5, entonces R relaciona $a0b$ con b para todo b, de modo que $[a0b]Rb$ es verdadero, es decir, $[a0b](a0)b$. Por tanto $a0{}''\beta$ sería la clase de aquellos objetos $a0y$ tales que y es miembro de β. Por ejemplo, $R|''\beta$ es la clase de aquellos productos relativos $R|S$ tales que la relación S es miembro de β, y $a{\downarrow}''\beta$ es la clase de aquellos pares ordinales $a{\downarrow}x$ tales que x está en β. De modo similar $0b{}''\alpha$ es la clase de aquellos objetos $x0b$ tales que x es miembro de α. Por ejemplo, $|S''\alpha$ es la clase de aquellos productos relativos $R|S$ tales que R es miembro de α.

65.7. A veces es conveniente considedar la clase $0b{}''\alpha$ como si fuese el resultado de una operación entre α y b. Por tanto consideramos $\hat{}\alpha 0b\check{}$ como una abreviación de $\hat{}0b{}''\alpha\check{}$ ([PM] * 38.03) y considerar que $\overset{''}{0}$ representa una operación entre α y b. Por tanto $\hat{}\alpha\overset{''}{0}{}''b\check{}$ denotaría la clase de aquellas clases $0b_1{}''\alpha$, $0b_2{}''\alpha$, y así sucesivamente, donde b_1, b_2, etc., son miembros de β, y donde, por ejemplo, $0b_2{}''\alpha$ es la clase de aquellos objetos a_10b_2, a_20b_2, a_30b_2, y así sucesivamente, donde a_1, a_2, a_3, etc., son miembros de α. Más específicamente, si $\hat{}0\check{}$ es '$\downarrow$', donde $\hat{}a{\downarrow}b\check{}$ denota el par ordinal a, b (64.24, [PM] * 55), entonces $\hat{}\alpha\overset{''}{\downarrow}b\check{}$ denotaría la clase de todos los pares ordinales cuyo primer elemento está en α y cuyo segundo elemento es b, y $\hat{}\alpha\overset{''}{\downarrow}{}''\beta\check{}$ denotaría la clase de todas las clases $\alpha\overset{''}{\downarrow}\beta$ de pares ordinales donde $\overset{''}{b}$ está en β. Por tanto, $\hat{}s`[\alpha\overset{''}{\downarrow}{}''\beta]\check{}$ denota la suma lógica de la clase de las clases $[\alpha\overset{''}{\downarrow}{}''\beta]$ (55.4), y por tanto denota la clase de todos aquellos pares ordinales $\overset{''}{\text{tales}}$ que el primer elemento está en α y el segundo elemento está en β. Finalmente puede demostrarse que $s`s`[\alpha\overset{''}{\downarrow}{}''\beta]$ (60.63) es lo mismo que $\alpha\uparrow\beta$ (62.1). En la notación de [R] 222 (cp. 51.3) la clase $s`[\alpha\overset{''}{\downarrow}{}''\beta]$ se denotaría por $\hat{}\{x{\downarrow}y|x\in\alpha\cdot y\in\beta\}\check{}$. Esta clase también es lo mismo que $\beta\times\alpha$ como se define en [PM] * 113.02, donde se denomina *clase-producto aritmético de* α y β. Es estrechamente análoga al producto cartesiano de α y β (54.6, 62.1, 62.2) pero este último es una

clase de pares ordenados (60.3) en vez de clases de pares ordinales (64.24). Ver también 60.1. (Cp. 08.9 con respecto a '*s*'.)

66. Algunas relaciones y clases importantes adicionales

66.01. Quine en 4585, p. 26 escribe '$\langle \alpha, x \rangle$' en vez de '$x \in \alpha$'. (Cp. 52.1.)

66.02. El símbolo '$\in$', aunque originalmente no denota una relación en [PM] * 20.20, también se usa sin embargo en * 62.01 como el nombre de la relación de membrecía. Así $\in$''κ es la suma de la clase de clases κ (55.2, 55.4, 63.4, [PM] * 62.3), y $\in$''κ es el producto de la clase de clases κ (55.1, 55.4, 63.9). '$\ni$' se usa para denotar membrecía en [Q] (232). (En los parágrafos anteriores y en los sucesivos, la letra griega 'κ' se usa como las letras itálicas con fines metalingüísticos. Ver 08.3-08.8 y especialmente 08.7.)

66.03. Los símbolos '$\notin$' y '$\ni$' pueden usarse como abreviaciones de '$\overline{\quad \in}$', es decir, como nombres de no-membrecía (cp. [R] 197).

66.04. Quine en 4585, p. 78, escribe '$\exists x$' para '$\hat{\alpha}(\alpha, x)$'. Aquí '$\exists x$' denota la clase de las clases de la que es miembro x.

66.05. 'Cl' es una abreviación de '$\hat{\kappa}\hat{\alpha}[\kappa = \hat{\beta}[\beta \subset \alpha]]$' en [PM] * 60.01. Así la relación Cl se cumple de una clase κ (de clases) a una clase α si κ es la clase de subclases de α. La clase Cl'α es la clase de subclases de α y por tanto es lo mismo que $\hat{\beta}[\beta \subset \alpha]$. En [R] (255) 'SC($A$)' sustituye a '$\hat{\beta}(\beta \subset A)$'. Aquí Rosser usa '$\subseteq$' en vez de '$\subset$', el símbolo usado en [PM], y Rosser reservaría '$\subset$' para la inclusión propia (véase 53.3). En [PM] '$\subset$' no significa inclusión propia. En [R] (252) 'USC(A)' sustituye a '$\{\{x\} | x \in A\}$' y denota la clase de subclases unitarias de A (cp. 51.3, 64.2). Así como 'Cl' denota la relación de la clase de subclases de una clase con la clase misma, así 'Rl' también se usa para denotar la relación de la clase de subrelaciones (60.42) de una relación dada con esa relación misma. Por lo tanto, 'Rl' es una abreviación de '$\hat{\kappa}\hat{R}[\kappa = \hat{S}[S \subset R]]$' (60.46, 60.42, [PM] * 61.01).

66.06. En Quine 4585, p. 35, la expresión '$[\alpha]$' sustituye a la misma clase que '$\hat{\beta}[\alpha \subset \beta]$' sustituye en la notación usual, es decir, sustituye a la clase de clases de las que α es una subclase.

66.07. 'Cnv' por $\text{`}\hat{R}\hat{S}[R=\breve{S}]\text{'}$ (aquí "por" significa "es una abreviación de" y, naturalmente, $\text{`}R\text{'}$ y $\text{`}S\text{'}$ son variables para relaciones). $\text{`Cnv`}R\text{'}$ significa lo mismo que $\text{`}\breve{R}\text{'}$. (Cp. 61.2, [PM] * 31.01.)

66.08. $\text{`}\dot{R}\text{'}$ por $\hat{\alpha}\hat{y}[\alpha=\hat{x}[xRy]]\text{'}$. $\text{`}\dot{R}\text{`}y\text{'}$ significa lo mismo que $\text{`}\hat{x}[xRy]\text{'}$. (Cp. 63.2, [PM] * 32.01.) Si llamamos a $\dot{R}\text{`}y$ la clase de los *predecesores* R de y (la clase de aquellos objetos que tienen la relación R con y), entonces $\dot{R}\text{``}\beta$ puede considerarse como la clase de las clases de los predecesores R de miembros de β. (Cp. 63.4.)

66.09. $\text{`}\dot{R}\text{'}$ por $\text{`}\hat{\beta}\hat{x}[\beta=\hat{y}[xRy]]\text{'}$. $\text{`}\dot{R}\text{`}x\text{'}$ significa lo mismo que $\text{`}\hat{y}[xRy]\text{'}$. (Cp. 63.3, [PM] * 32.02). Si llamamos a $\dot{R}\text{`}x$ la clase de los *sucesores* R de x (la clase de aquellos objetos con los que x tiene la relación R), entonces $\dot{R}\text{``}\alpha$ puede considerarse como la clase de las clases de los sucesores R de miembros de α. (Cp. 63.5.)

66.10. 'sg' por $\text{`}\hat{S}\hat{R}[S=\overrightarrow{R}]\text{'}$, y 'gs' por $\text{`}\hat{S}\hat{R}[S=\overleftarrow{R}]\text{'}$. $\text{`sg`}R\text{'}$ significa lo mismo que $\text{`}\dot{R}\text{'}$, y $\text{`gs`}R\text{'}$ significa lo mismo que $\text{`}\ddot{R}\text{'}$. (Cp. 66.08, 66.09, [PM] * 32.02, * 32.04.)

66.11. 'D' por $\text{`}\hat{\alpha}\hat{R}[\alpha = R\text{``V}]\text{'}$ y 'Cl' por $\text{`}\hat{\alpha}\hat{R}[\alpha = \breve{R}\text{``V}]\text{'}$. $\text{`D`}R\text{'}$ significa lo mismo que $\text{`}R\text{``V}\text{'}$, es decir, el dominio de $R$; y $\text{`Cl`}R\text{'}$ significa lo mismo que $\text{`}\breve{R}\text{``V}\text{'}$, es decir, el codominio de R. (Cp. 63.6, 63.7, [PM] * 33.)

66.12. 'C' por $\text{`}\hat{\alpha}\hat{R}[\alpha = R \cup \breve{R}]\text{``V}\text{'}$. $\text{`}C\text{`}R\text{'}$ significa lo mismo que $\text{`}[R \cup \breve{R}]\text{``V}\text{'}$, es decir, el campo de R. (Cp 08.9, 63.8, [PM] * 33.)

66.13. Si f es una función y si R es la relación asociada de f, entonces $\text{D`}R$, el dominio de $R$, es la clase de los valores de $f$, mientras $\text{Cl`}R$, el codominio de R, es el dominio de definición (05.3) de f. Rosser, sin embargo, permite que la *conversa* de la relación asociada sirva, para sus fines, como la relación asociada, y considera la función como idéntica a su relación asociada (en este sentido). Así, en lugar de decir que la relación asociada con una función f es la relación uno-varios, $\hat{x}\hat{y}[x = f(y)]$ (cp. 64.31), Rosser diría que la relación asociada a una función f es la relación varios-uno, $\hat{x}\hat{y}[f(x) = y]$ y que f mismo es simplemente esta relación varios-uno. Este procedimiento está en estrecho acuerdo con el uso actual en el campo de las matemáticas, ya que el dominio de la relación se considera normalmente como el dominio de definición de la función (es decir, la clase de argumentos de la función) y el codominio de la relación se considera normalmente como la clase de los valores de la función. Así Rosser define $\text{`Arg}(R)\text{'}$ como $\text{`}\hat{x}(\exists y)[xRy]\text{'}$ y $\text{`Val}(R)\text{'}$ como

$\lq\hat{y}(\exists x)[xRy]\rq$, y $\lq$"AV(R)$\rq$ como $\lq$Arg(R) $\cup$ Val(R)$\rq$, de modo que $\lq$Arg(R)$\rq$ denota el dominio de la relación, y $\lq$Val(R)$\rq$ denota el codominio de la relación, y $\lq$AV(R)$\rq$ denota la unión de Arg(R) y Val(R) y por tanto denota el campo de R.

66.14. Quine, a diferencia de Rosser, considera la relación asociada de una función como uno-varios más que como varios-uno e identifica a las funciones con sus relaciones asociadas uno-varios. Para cualquier relación R, sea o no uno-varios (es decir, sea o no una función, en la terminología de Quine), existe una clase $\breve{r}R$ denominada por Quine "rango de funcionalidad de R", y que tiene como miembros aquellos miembros del codominio de R con cada uno de los cuales mantiene la relación R un miembro exactamente del dominio de R. Así $\lq\breve{r}R\rq$ puede definirse como $\lq\hat{y}(\exists z)(x)[x = z \equiv xRy]\rq$ (cp. [Q] 222). Una relación cuyo dominio es su rango de funcionalidad sería entonces uno-varios y por tanto una función en el sentido de Quine.

66.15. *'F'* por $\lq\in|C\rq$, aunque se da una definición más complicada en [PM] * 33.04. F es la relación de cada miembro del campo de una relación con la relación. $\vec{F}$ es la misma relación que C. (Cp. 08.9 con respecto a *'C'* y *'F'*.)

66.16. *'B'* por $\lq\hat{x}\hat{R}[x \in \mathrm{D}`R \,.\sim [x \in \mathrm{C}`R]]\rq$ (Woodger III 42, p. 40). La relación B (iniciador de) relaciona a x con R si x tiene la relación R con algún objeto pero ningún objeto tiene la relación R con x. (Cp. 08.9 con respecto a *'B'*).

66.17. $\lq R_{\in}\rq$ por $\lq\hat{\alpha}\hat{\beta}[\alpha = R``\beta]\rq$. ([PM] * 37.02.) $\lq R_{\in}\rq$ denota la misma relación que $\lq\overrightarrow{R|\in}\rq$ (61.3, 66.08). La relación $R_{\in}$ relaciona una clase α con una clase β con tal que α conste de todos aquellos objetos que tengan la relación R con miembros de β. Por ejemplo, si R es la relación *marido de,* entonces $R_{\in}$ es la relación de α con β tal que α es la clase de los maridos de los miembros de β. Así, $R_{\in}`\beta$ es la misma clase que $R``\beta$. Por la convención expuesta en 65.4, es posible considerar que $\lq R``\rq$ denota una relación, de hecho la misma relación que se denota por medio de $\lq R_{\in}\rq$.

66.18. $\lq R```\kappa\rq$ por $\lq R_{\in}``\kappa\rq$, o por $\lq(R``)``\kappa\rq$. ([PM] * 37.04.) Así $\lq R```\kappa\rq$ denota la clase de todas las clases que tienen la relación $R_{\in}$ con algún miembro de κ. Por ejemplo, si R es la relación *marido de,* si κ_1 consta de clases de hombres y κ_2 consta de clases de mujeres, y si cada clase de κ_1 consta de los maridos de los miembros de alguna clase de κ_2, entonces κ_1 es $R```\kappa_2$.

66.19. Si $`R$ denota cualquier relación, $`R_*$ denota el *ancestral de R*, es decir, la relación que se cumple de x a y si alguna potencia de R (incluyendo posiblemente la potencia cero) se cumple de x a y (61.5). Así a tiene la relación R_* con b con tal que exista un número finito n de pasos tales que aRc_1, c_1Rc_2, ..., c_nRb son todos verdaderos, o si (en el caso de potencia cero) a es idéntico a b y está en el campo de R. La relación R_* se denomina ancestral de R porque si R es la relación *padre de* entonces R_* es la relación *antepasado de* suponiendo que admitamos considerar a una persona como su propio antepasado. Puede demostrarse que R_* es reflexiva (64.14) y transitiva (61.7). Con el fin de explicar la definición de $`R_*$ como se da en [PM] * 90.01, es deseable introducir el concepto de *clase hereditaria R*. Se dirá que una clase α es *hereditaria R* si cualquier objeto con el que un miembro de α tiene la relación R es también miembro de α. Así α es hereditaria R si y sólo si $\breve{R}``\alpha \subset \alpha$. La relación R_* puede definirse entonces como la relación de x con y tal que x pertenece al campo de R e y pertenece a toda clase hereditaria R a la que pertenece x. Por ejemplo, si R es la relación *padre de* y si α es la clase de las personas que tienen el apellido "Adams", entonces α es hereditaria R, porque (en la mayoría de las sociedades angloparlantes) un niño tiene el mismo apellido que su padre. Claramente la única condición bajo la cual y puede pertenecer a todas las clases hereditarias R a las que pertenece x es la condición de que existe una secuencia finita de proposiciones verdaderas de la forma: xRz_1, z_1Rz_2, ..., $z_{n-1}Rz_n$, z_nRy, y por tanto que x es un antepasado de y en la línea masculina. De hecho R_* en este ejemplo es la relación *antepasado de en la línea masculina.* Estas consideraciones justifican la definición de $`R_*$ en [PM] * 90.01 como $`\hat{x}\hat{y}[[x \in C`R] . (\alpha)[[[\breve{R}``\alpha \subset \alpha] . [x \in \alpha]] \supset [y \in \alpha]]]$. Para otra forma ligeramente diferente de esta definición que muestra la relación del concepto de ancestral con el concepto matemático de cierre, véase [*R*] 305. En [Q] 216, se define un tipo de ancestral, $_*R$, ligeramente diferente. Este tiene la propiedad $(x) * R(x, x)$ y es consistente con la opinión de Quine de R^0 como identidad. Véase 64.13 y [Q] 221, 253. (Véase 08.9 con respecto a *'C'*.)

66.20. Así como R_* es la relación de x con y tal que alguna potencia de R, incluyendo posiblemente la potencia cero, se cumple de x a y, del mismo modo R_{po} es la relación de x con y tal que alguna potencia de R, distinta de la potencia cero, se cumple de x a y. Podemos considerar $`R_{po}$ como una abreviación de $`R_*|R$ (cp. [PM] * 91.52), aunque la definición realmente usada en [PM] * 91.05 es $`\acute{s}`Pot`R$ (cp. 60.63 y 66.23) de modo

que R_{po} se considera como la suma relacional de la clase de potencias distintas de cero de R. En [Q] 221 R_{po} se denomina *ancestral propio.*

66.21. La relación R_{st} es la relación que cada una de las relaciones S, $R|S$, $R|(R|S)$, $R|(R|(R|S))$, y así sucesivamente tienen con S. Podemos definir $`R_{st}$ como $`(R|)_*$ ([PM] * 91.01), ya que $R|S$ tiene la relación $R|$ con S, y $R|(R|S)$ tiene la relación $R|$ con $R|S$, y así sucesivamente, de modo que cada una de las relaciones $R|S$, $R|(R|S)$, etc., tienen la relación $(R|)_*$ con S (cp. 65.4, 61.3, 66.19) y S mismo tiene la relación $(R|)_*$ con S a causa de la reflexividad de $(R|)_*$ (66.19).

66.22. De modo similar la relación R_{ts} es la relación que cada una de las relaciones S, $S|R$, $(S|R)|R$, etc., tienen con S, y $`R_{ts}$ puede definirse como $`(|R)_*$ ([PM] * 91.02). De hecho, R_{ts} relaciona cada potencia distinta de cero de R (61.5) con R mismo.

66.23. La relación Pot es la relación que la clase de potencias de R, excluida la potencia cero, tiene con R (61.5). Por tanto 'Pot' puede definirse como $`\hat{\kappa}\hat{R}[\kappa = \hat{S}[SR_{ts}R]]$, y 'Pot'$R$ denota la clase de potencias de R.

66.24. La relación Potid es la relación de la clase de todas las potencias de R, incluyendo la potencia cero, con R mismo, de modo que Potid'R es la clase de todas las potencias de R, incluyendo la potencia cero. Podemos definir 'Potid' como $`\hat{\kappa}\hat{R}[\kappa = \hat{S}[SR_{ts}R^0]]$ donde $`R^0$ se define como $`I\restriction C`R$ (61.5). Aquí 'id' se usa como parte de 'Potid' para indicar que la potencia cero, que es un tipo de identidad restringida, está incluida entre las potencias. (Ver 08.9 con respecto a 'C' e 'I'.)

66.25. La posteridad R de x consta de todos los objetos con los que x tiene la relación R_*, y por tanto es $\breve{R}_*`x$. La posteridad $R$ propia de $x$ consta de todos los objetos con los que $x$ tiene la relación $R_{po}$ (el ancestral propio de $R$), y por tanto es $\breve{R}_{po}`x$ (66.20). De modo similar la ancestralidad R de x es $\breve{R}_*`x$ y la ancestralidad $R$ propia de $x$ es $\breve{R}_{po}`x$. No siempre es el caso de que x esté en su propia ancestralidad R propia, aunque, si x está en el campo de R, x está siempre en su propia ancestralidad R.

66.26. $`R(x - y)$ por $`\breve{R}_{po}`x \cap \breve{R}_{po}`y$ ([PM] * 121.01). Aquí $R(x - y)$ se denomina *intervalo* entre x e y, sin incluir los puntos finales x e y. Consta de aquellos objetos que pertenecen a la posteridad R propia de x y a la vez pertenecen a la ancestralidad R propia de y. De modo similar

$`R(x\dashv y)`$, $`R(x\vdash y)`$, y $`R(x\vdash\dashv y)`$ se definen como $`\breve{R}_{po}`x \cap \breve{R}_{*}`y`$, $`\breve{R}_{*}`x \cap \breve{R}_{po}`y`$, y $`\breve{R}_{*}`x \cap \breve{R}_{*}`y`$, respectivamente. En el intervalo $R(x\dashv y)$ se incluye el punto final y, pero no el punto final x. En el intervalo $R(x\vdash y)$ se incluye el punto final x, pero no el punto final y. En el intervalo $R(x\vdash\dashv y)$ se incluyen a la vez los puntos finales x e y.

66.27. $`R; S`$ por $`R|S|\breve{R}`$ ([PM] * 150.01), o equivalentemente, por $`\hat{x}\hat{y}(\exists z, w)[xRz \,.\, zSw \,.\, yRw]`$. Así $R; S$ se cumple de a a b si a tiene la relación R con z, y z tiene la relación S con w, e y tiene la relación R con w. Si R es uno-uno, entonces $R; S$ es la relación de $R`z$ con $R`w$ con tal que z tenga la relación S con w. Por ejemplo, si S es alguna relación entre números, y si R es la relación *cuadrado de*, entonces $R; S$ es la relación entre los cuadrados de dos números cuando S es la relación entre los números mismos. Existe una analogía entre $R; S$ y $R``\alpha$ (63.2) en el siguiente sentido: Si consideramos R y S como clases de pares ordenados y si P es la relación que relaciona el par ordenado $\langle x_1, x_2\rangle$ con el par ordenado $\langle y_1, y_2\rangle$ siempre que $\langle x_1, y_1\rangle$ y $\langle x_2, y_2\rangle$ sean ambos miembros de R (es decir, siempre que R relacione x_1 con y_1 y x_2 con y_2), entonces $R; S$ es la misma relación (es decir, la misma clase de pares ordenados) que $P``S$. (Cp. 60.1, 60.3.) Así como $R``\alpha$ se denomina *mapa* o *proyección* de α mediante R, así también $R; S$ puede denominarse *mapa* o *proyección* de S mediante R. Así como $a{\downarrow}``\beta$ es la clase de los pares ordinales $a{\downarrow}x$ tales que x está en β (65.6), así también $a{\downarrow}; S$ es la relación entre dos pares ordinales $a{\downarrow}x$ y $a{\downarrow}y$ tales que x tiene la relación S con y. De modo similar $\downarrow b; S$ es la relación entre dos pares ordinales $x{\downarrow}b$ y $y{\downarrow}b$ tales que x tiene la relación S con y.

66.28. Así como $`\alpha 0b`$ es una abreviación de $`0b``\alpha`$ (65.7), así también $`S0b`$ es una abreviación de $`0b; S`$ ([PM] * 150.03) y en particular $`S{\downarrow}b`$ es una abreviación de $`{\downarrow}b; S`$. También, así como $`\alpha{\downarrow}``\beta`$ denota la clase de aquellas clases $\downarrow y``\alpha$ donde $y$ está en $\beta$ (y donde $\downarrow y``\alpha$ es la clase de aquellos pares ordinales $x{\downarrow}y$ tales que x está en α), así también $`S{\downarrow}; T`$ denota la relación de una relación $\downarrow y; S$ con una relación $\downarrow z; S$ tal que y tiene la relación T con z.

66.29. $`R\dagger`$ por $`R;`$. Compárese con $`R_{\in}`$ (66.17). Este símbolo '†' como aquí se usa no debe confundirse con '†' como se definió en 61.4.

66.30. $`R\|S`$ por $`(R|)(|S)$ ([PM] * 43.01). Así $R\|S$ es la relación de $P$ con $Q$ tal que $P = R|Q|S$ (61.3), y $[R\|S]`Q$ es la misma relación que $R|Q|S$. Además, $[R\|\breve{R}]`Q$ es la misma relación que $R; Q$ (66.27), y $R\|\breve{R}$ es la misma relación que $R\dagger$ (66.29).

66.31. Supongamos que tenemos una clase de clases κ dada, y que deseamos una relación R que relacione exactamente un miembro de cada miembro α de κ con ese miembro α, de modo que $R`\alpha$ puede denominarse *miembro seleccionado* de $\alpha$, y $R$ puede denominarse *relación selectiva* de $\kappa$. La relación $R$ requerida debería ser tal que $R \in [1 \to \mathrm{Cls}] . [R \subset \in] . [\mathrm{C}`R = \kappa]$ (64.31, 63.7, 66.13, 66.02, 60.46), es decir una relación uno-varios, una subrelación de $\in$, y tal que κ es su dominio converso. La clase de todas las relaciones selectivas de κ pueden denotarse mediante $`\in_{\Delta}`\kappa$, donde $`\in_{\Delta}$ es la relación de la clase $\mu$ de relaciones selectivas de $\kappa$ con $\kappa$ mismo, y donde $`\in_{\Delta}$ abrevia a la expresión $`\hat{\mu}\hat{R}[\mu = \hat{R}[R \in [1 \to \mathrm{Cls}]] . [R \subset \in] . [\mathrm{C}`R = \kappa]]$. De modo más general, dada una relación P que tiene a κ como su dominio converso, definimos $`P_{\Delta}$ como $`\hat{\mu}\hat{R}[\mu = \hat{R}[R \in [1 \to \mathrm{Cls}]] . [R \subset P] . [\mathrm{C}`R = \kappa]]$ y denominamos $P_{\Delta}`\kappa$ a la clase de las *selecciones* P de κ ([PM] * 80). Cada selección P de κ es una subrelación uno-varios de P que tiene a κ como su dominio converso. Una tal selección P de κ relaciona exactamente un miembro de cada clase de la forma $\vec{P}`y$ con $y$ mismo, donde $y$ es miembro de $\kappa$. Si $P$ es la relación $\in$, entonces $y$ debe ser una clase $\alpha$, y $\vec{P}`y$ debe ser lo mismo que α. En este caso una selección P de κ es una relación selectiva para κ.

66.32. El símbolo '$\ddagger$' se define ([PM] * 85.5) de tal modo que $R \ddagger y = \downarrow y``\breve{R}`y$ (cp. 63.4, 64.24, 65.4, 66.08), por lo que $R \ddagger y$ es la clase de pares ordinales que tienen como primer elemento a los objetos que tienen la relación R con y y que tienen a y mismo como segundo elemento. En particular, $\in \ddagger \alpha$ es la clase de los pares ordinales que tienen como primeros elementos a los miembros de α y como segundo elemento a α mismo. Así $\in \ddagger \alpha$ y $\in \ddagger \beta$ son clases no-solapadas si α y β son distintas, y tienen los mismos números cardinales que α y β respectivamente. (Cp. 81.)

67. Relaciones de más de dos términos

67.1 Podemos considerar las relaciones de más de dos términos como funciones proposicionales de más de dos argumentos (05.9). Así como $R(a, b)$ puede considerarse como una proposición que asevera que una relación diádica R relaciona a a con b, así también $S(a, b, c)$ puede con-

siderarse como una proposición que asevera que una relación triádica S relaciona a, b, y c (en ese orden); y de modo similar $T(a, b, c, d)$ puede considerarse como una proposición que asevera que una relación tetrádica T relaciona a a, b, c y d (en ese orden); y así sucesivamente para las relaciones de cualquier número finito de términos.

67.2. Así como '$R(a, b)$' se escribe a veces como 'aRb', donde 'R' denota una relación diádica, así '$S(a, b, c)$' también puede escribirse como 'aSb, c' o como '$aS(b, c)$', donde 'S' denota una relación triádica. (Este tipo de notación se usa en Hull, Hovland, Ross, Hall, Perkins, Fitch, II 37.)

67.3. Así como las relaciones diádicas pueden considerarse como clases de pares ordenados (60.1), así las relaciones triádicas también pueden considerarse como clases de triplos ordenados, y las relaciones tetrádicas como clases de cuádruplos ordenados, etc. Si se usa la notación '$\langle a, b\rangle$' para denotar el par ordenado a, b (60.31, 64.26), entonces puede usarse '$\langle a, b, c\rangle$' para denotar el triplo ordenado a, b, c, donde '$\langle a, b, c\rangle$' puede considerase como una abreviación de '$\langle\langle a, b\rangle, c\rangle$' ([R] 283). De modo similar, '$\langle a, b, c, d\rangle$' puede usarse para denotar un cuádrupo ordenado y puede considerarse como una abreviación de '$\langle\langle a, b, c\rangle, d\rangle$'; y así sucesivamente. En Gödel VI 112, se usa una notación similar pero con la omisión de las comas y con la convención de que '$\langle abc\rangle$' es una abreviación de '$\langle a\langle bc\rangle\rangle$', y '$\langle abcd\rangle$' es una abreviación de '$\langle a\langle bcd\rangle\rangle$', y así sucesivamente.

67.4. Si el par ordenado a, b se denota mediante '$a;b$' (60.31), entonces el triplo ordenado a, b, c puede denotarse mediante '$a;b;c$', donde '$a;b;c$' es una abreviación de '$(a;b);c$'. Este mismo método puede extenderse a cuádruplos ordenados, quíntuplos ordenados, etc.

67.5. Un ejemplo de relación triádica es la relación de celos entre a, b y c tal que a está celoso de b a causa de c. Si 'S' denota esta relación, entonces la proposición de que a está celoso de b a causa de c podría expresarse en uno cualquiera de los modos siguientes:

$$S(a, b, c),$$
$$aSb, c,$$
$$aS(b, c),$$
$$\langle a, b, c\rangle \in S,$$
$$\langle abc\rangle \in S,$$
$$a;b;c \in S.$$

CAPITULO 7

LA ARITMETICA FORMALIZADA COMO DISCIPLINA INDEPENDIENTE

70. Introducción. En los escritos lógicos entendemos normalmente por aritmética, la aritmética de los enteros no negativos o números naturales, 0, 1, 2, ... La aritmética de los números naturales puede desarrollarse o bien como una disciplina independiente o bien como parte de una teoría fundamental más amplia como la teoría de conjuntos en una de sus formas, o lógica combinatoria. La primera alternativa (y la que se considera en este capítulo) es la seguida por [HB] y [K], la última es la seguida por [Q], [R], y Gödel (4183), según el modelo de [PM], y por Rosser (5461) (43.5, 45.4).

71. Los axiomas de Peano. Siguiendo métodos que se aproximan a los que usó originalmente Peano (717), las propiedades de los números naturales pueden describirse en axiomas cuyos términos primitivos son:

(1) 'N', que denota el conjunto de los números naturales;
(2) las variables '*x*', '*y*', '*z*', ... para enteros, y '0' para cero;
(3) un símbolo para el concepto de sucesor, donde el *sucesor* de un entero es el entero inmediatamente mayor. Con este fin se usa a menudo el símbolo '′'. Así '0′' denota el número 1, '0″' denota el número 2, y así sucesivamente. En general '*n*′' denota el sucesor de *n*.

Así lo que sigue a continuación corresponde a los axiomas de Peano, donde '=' se usa para la noción intuitiva de igualdad y (v) expresa el principio de inducción matemática:

(i) $0 \in \mathrm{N}$,
(ii) $(x)[x \in \mathrm{N} \supset x' \in \mathrm{N}]$,
(iii) $(x)(y)[[x \in \mathrm{N} \,.\, y \in \mathrm{N} \,.\, x' = y'] \supset x = y]$,
(iv) $(x)[x \in \mathrm{N} \supset 0 \neq x']$,
(v) $[\phi 0 \,.\, (x)[[x \in \mathrm{N} \,.\, \phi x] \supset \phi x']] \supset (x)[x \in \mathrm{N} \supset \phi x]$.

72. Formulación de la teoría como disciplina independiente

72.1. Consideremos ahora la teoría de los números naturales desarrollada como una disciplina independiente. Se considera que todas las variables se refieren a los números (naturales), de modo que los axiomas (i) y (ii) pueden omitirse y los requisitos '$x \in \mathrm{N}$' y '$y \in \mathrm{N}$' se eliminan a lo largo de (iii) y (v). Un desarrollo tal se realiza normalmente en lo que se denomina modo elemental, es decir, en un formalismo sin variables predicativas libres (*a fortiori* sin variables predicativas ligadas). El axioma (v) se considera por tanto como un axioma esquema, y 'ϕ' representa un contexto arbitrario. Esto proporciona la formalización siguiente:

72.2. Los términos son '0', variables y todos aquellos que sean de la forma 't'' donde 't' es un término. Las expresiones '0', '0'', '0''', ..., son numerales.

72.3. Las fórmulas atómicas son de la forma '$r = s$', donde 'r' y 's' son términos. Las fórmulas se construyen a partir de las fórmulas atómicas por medio de conectivas veritativo-funcionales y cuantificadores en el modo usual. Axiomas son todas aquellas fórmulas (en el sentido precisamente definido) que son instancias de los axiomas de alguna formulación elegida del cálculo funcional de primer orden con identidad (25), o de (iii), (iv) o (v) de 71 como se formuló de acuerdo con 72.1. Las reglas de inferencia son las del sistema elegido de cálculo funcional de primer orden.

73. Definición recursiva de suma y multiplicación

73.1. La teoría elemental de números se toma usualmente para incluir algo más que las notaciones y nociones incluidas en las secciones 71 y 72. También se incluye el estudio de la suma y multiplicación, con la notación aritmética acostumbrada para estas dos operaciones. Así la definición de aritmética elemental dada antes debe ampliarse del modo siguiente:

73.2. Los términos se amplían para incluir las expresiones $\ulcorner r + s \urcorner$ y $\ulcorner r \times s \urcorner$, (o $\ulcorner rs \urcorner$), donde $\ulcorner r \urcorner$ y $\ulcorner s \urcorner$ son términos. Las fórmulas se construyen a partir de la clase ampliada de términos en la forma acostumbrada. Los axiomas comprenden aquellos ya dados junto con los axiomas que son los llamados *definiciones recursivas* de suma y multiplicación:

73.3 $x+0=x$,
$x+y'=(x+y)'$.

73.4. $x0=0$,
$xy'=xy+x$.

73.5. Las dos formulaciones clásicas de la teoría axiomática elemental de números, [HB] y [K], tienen ambas los axiomas anteriores superpuestos a una base del cálculo funcional de primer orden con identidad. (Los cuantificadores universales podrían considerarse unidos a los anteriores axiomas, pero esto no es necesario si se usan reglas de inferencia adecuadas.)

73.6. Las definiciones recursivas constituyen un genuino aditamento para el poder expresivo de la teoría. Estas definiciones también nos permiten eliminar los signos de suma y multiplicación de algún término en el que, además de estos signos, sólo ocurren constantes numerales (construidas a partir de '0' y '′'). Sin embargo, estas definiciones no nos permiten siempre eliminar los signos de suma y multiplicación si ocurren variables.

74. Aritmética recursiva. La aritmética recursiva es de interés especial para el lógico como una teoría auxiliar usada en metamatemática (Capítulo 9). Como nuestra tarea es la explicación de los símbolos lógicos, nos abstenemos de dar aquí las definiciones de las distintas formas de recursión, y nos abstenemos de dar las definiciones recursivas de las funciones recursivas matemáticas más familiares (con excepción, naturalmente, de la suma y multiplicación, dadas antes). Entre las funciones así omitidas se encuentran la exponenciación y la función factorial.

75. Conceptos auxiliares

75.1. Para la definición recursiva de operaciones inversas (análogas a la sustracción y división) necesitamos algunos conceptos auxiliares.

75.2. 'pd(n)' puede interpretarse como el *predecesor* de n, teniendo en cuenta que 0 es su propio "predecesor" ([K] 223).

$$\mathrm{pd}(0) = 0,$$
$$\mathrm{pd}(x') = x.$$

La notación de [HB] para 'pd(n)' es '$\delta(n)$' (i 300).

75.3. sg(n) es 0 si $n = 0$ y 1 si $n > 0$ ([K] 223).

75.4. $\overline{\mathrm{sg}}(n)$ es 0 si $n > 0$ y 1 si $n = 0$ ([K] 223).

75.5. min(a, b) es el menor de dos números a y b ([K] 223). Más precisamente, min(a, b) es exactamente $b \dot{-} (b \dot{-} a)$ ([K] 223), donde $a \dot{-} b$ se define como en 76.2.

75.6. max(a, b) es el mayor de los números a y b ([K] 223). Más precisamente, max(a, b) es exactamente $(a + b) \dot{-} \min(a, b)$ ([K] 223).

76. Operaciones inversas

76.1. Deben definirse análogos a la sustracción y división. Los valores de estas operaciones coinciden con la aritmética ordinaria excepto cuando los valores no sean números naturales (enteros no negativos) en aritmética ordinaria. Estas operaciones se definen de modo que sus valores son números naturales en todos los casos, aun cuando no sean tales en aritmética ordinaria.

76.2. $a \dot{-} n$ es la diferencia de a y n si $a \geqslant n$, y 0 de otro modo ([K] 223). En términos de la función pd (75.2),

$$x \dot{-} 0 = x,$$
$$x \dot{-} y' = \mathrm{pd}(x \dot{-} y).$$

La notación de [HB] para '$a \dot{-} n$' es '$\delta(a, n)$' (i 303).

76.3. El valor absoluto $|a - n|$ de la diferencia aritmética de a y n es $(a \dot{-} n) + (n \dot{-} a)$ ([K] 223).

76.4. El resto de la división de a por b, digamos rm(a, b) se define así:

$$\mathrm{rm}(0, y) = 0,$$
$$\mathrm{rm}(x', y) = (\mathrm{rm}(x, y))' \,\mathrm{sg}(|y - (\mathrm{rm}(x, y))'|) \qquad ([\mathrm{K}]\ 223).$$

La notación de [HB] para '$\mathrm{rm}(a, b)$' es '$\rho(a, b)$' (i 317).

76.5. El cociente entre a y b, digamos a/b se define del modo siguiente:

$$0/y \stackrel{\bullet}{=} 0,$$
$$x'/y = x/y + \overline{\mathrm{sg}}(|y - (\mathrm{rm}(x, y))'|) \qquad ([\mathrm{K}]\ 223).$$

77. La función μ

77.1. La función cuyo valor para el argumento z se expresa mediante $\mu y_{y<z} R(y)$ tiene como su valor el menor y tal que $y < z$ y $R(y)$ si existe un tal y; de otro modo la función tiene el valor z ([K] 225). La notación que corresponde a esta notación de Kleene en Péter (XVI 280) es '$\mu_i[i < n \,\&\, R(y)]$'. Si existe un y tal que $R(y)$, entonces la expresión $\mu y R(y)$ denota el menor y ([K] 279). Si no existe un y tal, la expresión no tiene denotación.

77.2. Por medio de la función μ, pueden definirse expresiones tales como '$\varepsilon y R(x, y)$', que denota el menor y tal que $R(x, y)$ si existe un y tal, y de otro modo denota 0 ([K] 317).

CAPITULO 8

LOS NUMEROS SEGUN SE DEFINEN EN SISTEMAS DE LOGICA

80. Introducción. Si se considera la aritmética como una disciplina independiente, el concepto de número se toma habitualmente como indefinido; pero si la aritmética se considera como una parte de un sistema de lógica, el concepto de número puede ser definible en términos de otros conceptos. En particular los conceptos *cero* y *sucesor* pueden ser definibles en términos de otros conceptos. En cualquier caso, las definiciones usadas deben ser tales que hagan demostrables los axiomas de Peano (71). Las definiciones son diferentes en diferentes sistemas de lógica, pero son discernibles dos tradiciones principales. La primera (81), seguida por [Q] y [R], parte vía [PM] de la definición de Frege de número como una clase de clases similares. La segunda tradición (82) incluye la teoría de conjuntos desarrollada por Zermelo, Fraenkel, Bernays, von Neumann y Gödel. En 43.5 se indicó un tercer método usado en lógica combinatoria.

81. Las definiciones de números cardinales por similitud

81.1. Dos clases α y β se denominan *equinumerosas* o *similares* si existe una correspondencia uno a uno entre los miembros de α y los de β, es decir, si existe una relación R que sea uno-uno (64.33) y que tenga como dominio (63.6) a α y como codominio (63.7) a β, de modo que $\alpha = R``\beta$ (63.4). Una relación R de este tipo se denomina correlator cardinal de α con β. La clase $\alpha\breve{\text{sm}}\beta$ es la clase de correlatores cardinales de α con β ([PM] * 73.01). Podemos considerar $`\alpha\breve{\text{sm}}\beta'$ como una abreviación de $`\hat{R}[[R \in 1 \to 1] . [\alpha = \text{D}`R] . [\beta = \text{C}`R]]'$. [R] (345) escribe $`\alpha\ \text{sm}_R\ \beta'$ para aseverar que R es un correlator cardinal de α con β.

81.2. α y β son *similares,* $\alpha \operatorname{sm} \beta$ ([PM] * 73.02), si $\exists ! \alpha \overline{\operatorname{sm}} \beta$ (53.6, [PM] * 73.04), es decir, si existe un correlator cardinal de α con β.

81.3. Frege —y siguiéndole Russell— considera el *número cardinal* de una clase como la clase de todas las clases similares a esa clase. Así podemos considerar Nc'α (número cardinal de α) como $\hat{\beta}[\beta \operatorname{sm} \alpha]$ ([PM] * 101.1) y NC (la clase de los números cardinales) como $\hat{\alpha}(\exists \beta)[\alpha = \text{Nc}'\beta]$, es decir, como D'Nc ([PM] * 100.02). Estas son esencialmente las definiciones de Frege, [Q], y [R]. Las notaciones 'Nc' y 'NC' aparecen en [PM], en Quine VII 121, y en [R] (371-372), [R] escribe '$\text{Nc}(\alpha)$' en vez de '$\text{Nc}'\alpha$' (64.42, 66.13).

81.4. La noción de número cardinal es más amplia que la de número natural. Un número natural es un número cardinal finito ("inductivo") en el sentido de [PM] * 120 (cp. [R] 390). En [PM] se desarrolla la teoría de números para los números cardinales en toda su generalidad (cp. [PM] * 100) y también para los números de relación (cp. 85 y [PM] * 152).

81.5. Si dentro de esta aproximación general de Russell, Whitehead, Quine y Rosser intentamos desarrollar separadamente una teoría de números naturales, debemos definir el número 0, la función sucesor, y la clase de los números naturales (números cardinales finitos).

81.51. 0 puede definirse como el número cardinal de la clase vacía, es decir, como la clase de todas las clases similares a la clase vacía. Ya que nada es similar a la clase vacía excepto la clase vacía misma, 0 puede definirse más simplemente como la clase cuyo único miembro es la clase vacía. Así '0' por '$\iota'\Lambda$' (64.21, [Q] 237) o por '$\{\Lambda\}$' ([R] 252).

81.52. La definición de sucesor es motivada del modo siguiente. Si una clase tiene n miembros, entonces una clase β que contiene todos los miembros de α y además un miembro más contendrá $n + 1$ miembros. Inversamente, si una clase α se obtiene de una clase β omitiendo uno de los miembros de β, entonces α tendrá un miembro menos que β. Usando la notación '$\text{S}'n$' (cp. [Q] 238) para *el sucesor de n,* podemos definir 'S' de tal modo que

$$\text{S}'n = \hat{\beta}(\exists y)[y \in \beta \,.\, [[\beta \cap -\{y\}] \in n]].$$

En la exposición anterior se supone que las clases α y β son finitas.

81.53. Un número natural es 0, o el sucesor de 0, o el sucesor del sucesor de 0, y así sucesivamente. Es decir, un número natural es cualquier

cosa que está en el ancestral (cp. 66.19, [PM] * 90) de la relación sucesor de 0. Esta definición es común a Frege, Russell, [Q] y [R].

81.6. En [PM] y en general en los sistemas basados en la teoría de tipos (31), surge una complicación en las definiciones dadas. Pues aunque pueden realizarse al pie de la letra en cada tipo, se obtiene así una jerarquía completa de sistemas de números, uno en cada tipo (empezando con el tipo $o(o\iota)$ (cp. 32)). Así 2 en el tipo $o(o\iota)$ es la clase de todas las clases individuales de dos miembros, y así sucesivamente. Esta duplicación (que, si bien no invalida ninguno de los argumentos de la matemática clásica, ciertamente las complica considerablemente) se consideró pronto como una desventaja de la teoría de tipos, y fue una motivación primaria de la evolución de los dos sistemas de Quine (4585 y [Q]). [PM] tiene un sistema complicado de notación para los tipos relativos de números. Aquí no trataremos sobre ello (cp. [PM] * 12, * 103 — * 106).

82. El método de definición de números de von Neumann

82.1. La segunda tradición es la de la teoría de conjuntos desarrollada por Zermelo, Fraenkel, Bernays, von Neumann y Gödel. En esta segunda tradición los números naturales se definen por un método diferente del descrito antes. Aquí juega un importante papel un significado técnico especial del término *conjunto* (en alemán, *Menge*) (cp. 50.2), y esto es por lo que, con respecto a esto, es habitual hablar de *teoría de conjuntos.* En este sentido, todos los conjuntos son clases, pero no todas las cleses son conjuntos. Más específicamente, los conjuntos son aquellas clases que son miembros de otras clases. Las clases que no son a su vez miembros de clases se dice que son *clases propias.* Los conjuntos, entonces, son aquellas clases que no son clases propias. La clase de todos los conjuntos es un ejemplo de clase propia. Según esta opinión, no existe ninguna clase de todas las clases.

82.2. Si, en la teoría de conjuntos (desarrollada por Bernays y Gödel), intentamos definir el número n como la clase de todos los conjuntos de n números, entonces el número n no resultaría ser un conjunto sino una clase propia. Sin embargo, usando una definición de números debida a Von Neumann, los números pueden considerarse como conjuntos. Este método consiste en identificar 0 con el conjunto vacío, 1 con el conjunto que tiene como único miembro a 0, 2 con el conjunto que tiene como únicos miembros a 0 y 1, y así sucesivamente. En general, cada número

se define como el conjunto de sus predecesores. La consecuencia de esto es que cada número n es un conjunto de n miembros exactamente. Así '0' puede definirse como 'Λ' (51.4) y el símbolo 'S' para la función sucesor puede definirse de tal modo que $S'n = n \cup \{n\}$. El conjunto de todos los números naturales puede definirse entonces como en 81.53, pero este conjunto, desde el punto de vista presente, es un número transfinito (aunque no un número natural), y de hecho el menor número transfinito ω. Este método es aplicable no sólo a definiciones de números transfinitos sino que es bastante conveniente para tratar con la inducción transfinita. (Cp. Gödel VI 112.)

82.3. Debería advertirse que si se usa el método de 81.3, entonces decir que una clase tiene n miembros, es decir que la clase es un miembro de la clase que es el número n, mientras que si se usa el método de 82.2, entonces decir que un conjunto tiene n miembros, es decir que el conjunto es similar (en el sentido de 81.1) al conjunto que es el número n.

83. Operaciones aritméticas con números naturales, definidas por medio del ancestral

83.1. Estábamos obligados a considerar la suma y la multiplicación como nociones indefinidas en la formalización de la aritmética como una disciplina independiente (72), pero un sistema formal en el que puede definirse cero, la función sucesor y la clase de los números naturales, es también normalmente suficientemente fuerte para proporcionar las definiciones de suma y multiplicación de números naturales. Hay dos modos de hacer esto, y cada uno de estos modos puede combinarse con cualquiera de los dos modos de introducir números descritos en las anteriores secciones 81 y 82. El primero de los dos métodos es el seguido por Quine ([Q] 259) y se aplica sólo a los números cardinales inductivos (finitos). El segundo método (sección 84 siguiente) usado por Whitehead y Russell ([PM] $*110$ —$*116$) se aplica a todos los números cardinales, sean finitos o infinitos.

83.2. El método seguido por [Q] (253 ff) arranca de una definición de la *n-ésima potencia de la relación* R. Ya hemos definido las potencias relativas R^1, R^2, R^3, etc. (61.5). Pero estas definiciones no presuponen que '2', '3', etc., denotan los números cardinales 2, 3, etc. Por otra parte, para obtener una definición general de R^n donde n es cualquier número cardinal finito (inductivo), puede usarse el método de [PM] $*301$, o el

método más simple de [Q] 255, que incluye la noción auxiliar $\mathfrak{d}R$. El último método se bosquejará ahora.

83.3. Consideremos los pares $a;0$, $b;1$, $c;2$, ... (cp. 60.31), que corresponden intuitivamente a "a con el número 0", "b con el número 1", "c con el número 2", etc., donde a, b, c, etc., son miembros del campo de R (63.8). La relación auxiliar $\mathfrak{d}R$ ([Q] 255) se define como la relación de un par $x;n$ con un par $y;m$, tal que xRy y $m = \mathrm{S}'n$ son ambos verdaderos. Entonces R^n puede definirse como la relación de algún x con algún y tal que el par $x;0$ tiene el ancestral $*\mathfrak{d}R$ (66.19) de $\mathfrak{d}R$ con el par $y;n$. Así $`R^n`$ es una abreviación de $`\hat{x}\hat{y}(*\mathfrak{d}R(x;0,\ y;n))`$ ([Q] 255).

83.4. Las definiciones de suma, producto y potencia de los números naturales siguen tan estrechamente como sea posible las de la aritmética ordinaria elemental. Son las siguientes:

83.5. $m + n$ es el número que tiene con m la n-ésima potencia relativa de la relación sucesor S de m. Así $`m + n`$ es una abreviación de $`\mathrm{S}^{n}{}'m`$ ([Q] 259).

83.6. $m \times n$ es el número obtenido a partir de 0 mediante n sumas de m. Así $`m \times n`$ es una abreviación de $`(\lambda_a[m + a])^{n}{}'0`$ (65.2, [Q] 259).

83.7. $m/\!\!\wedge n$, es decir, m^n, es el número obtenido a partir de 1 mediante n multiplicaciones por m. (1 se define como S'0.) Así $`m/\!\!\wedge n`$ es una abreviación de $`(\lambda_a[m \times a])^{n}{}'1`$ (65.2, [Q] 259). El símbolo '$/\!\!\wedge$' es un signo de raíz invertido. $m/\!\!\wedge n$ (o m^n) es la n-ésima potencia del número natural m, mientras R^n es la n-ésima potencia relativa de la relación R.

84. Operaciones aritméticas con números cardinales

84.1. Las definiciones de suma, multiplicación y exponenciación se construyen todas en [PM] y [R] del mismo modo general, y se aplican tanto a los números cardinales infinitos como a los finitos (inductivos). En cada caso se define en primer lugar una operación con clases, en vez de la deseada operación aritmética con números cardinales. La operación con clases se elige de tal modo que si n y m son los números cardinales de α y β respectivamente, entonces la operación con las clases α y β proporciona una clase cuyo número cardinal es el resultado de la operación aritmética deseada con n y m.

84.2. En el caso de la suma de números cardinales, podemos permitir que '+' represente la suma aritmética de clases, la operación con clases expuesta en 84.1, y que '$+_c$' represente la suma aritmética de números cardinales, la operación correspondiente con los números cardinales mismos ([PM] * 110.01, * 110.02). Un modo de definir '$[\alpha + \beta]$' es como una abreviación de '$[\alpha \times \{\Lambda\}] \cup [\beta \times \{V\}]$' (54.6, 51.4, 64.21). Entonces si α tiene n miembros y β tiene m miembros, $\alpha + \beta$ tendrá como número de sus miembros la suma de n y m, incluso si α y β tienen miembros en común. (Este es esencialmente el procedimiento usado en [R] 374.) Por otra parte, $\alpha \cup \beta$ tiene como número de sus miembros la suma de n y m sólo si α y β no tienen ningún miembro en común. (El presente uso de '+' no debe confundise con '+' significando lo mismo que '$\cup$' como en 54.4, o con '+' significando suma en el sentido matemático ordinario (como en 73.2).) En [PM] * 110.01 se asigna a '$[\alpha + \beta]$' un significado diferente y algo más complicado, pero '$[\alpha + \beta]$', como ahí se define, sirve para los mismos fines de denotar una clase que tiene tantos miembros como la suma de n y m, donde α tiene n miembros y β tiene m miembros. La definición de '$[\alpha + \beta]$' usada en [PM] * 110.01 es '$[\downarrow[\Lambda \cap \beta]\text{``}\iota\text{``}\alpha] \cup [[\Lambda \cap \alpha] \downarrow \text{``}\iota\text{``}\beta]$'. Así $[\alpha + \beta]$ se considera aquí como la unión de dos clases de pares ordinales, la primera clase consta de pares ordinales cada uno de los cuales tiene una clase unitaria de un miembro de α como primer elemento y la clase vacía, $[\Lambda \cap \beta]$ del mismo tipo que β, como segundo elemento, y la segunda clase consta de pares ordinales cada uno de los cuales tiene la clase vacía, $[\Lambda \cap \alpha]$, del mismo tipo que α, como primer elemento y una clase unitaria de un miembro de β como segundo elemento. La primera clase tiene tantos miembros como tiene α, y la segunda clase tiene tantos miembros como tiene β; y las dos clases son no-solapadas, por lo que $[\alpha + \beta]$ tiene el número deseado de miembros.

84.3. La suma aritmética de dos cardinales se denotará por medio de '$\mu +_c \nu$' (la 'c' sustituye a "cardinal") que se define como '$\hat{\xi}(\exists\alpha)(\exists\beta)[[\mu = \mathrm{Nc}'\alpha] . [\nu = \mathrm{Nc}'\beta] . [\xi \mathrm{sm} [\alpha + \beta]]]$' ([PM] * 110.02). Así si $\mu = \mathrm{Nc}'\alpha$ y $\nu = \mathrm{Nc}'\beta$, entonces $[\mu +_c \nu] = \mathrm{Nc}'[\alpha + \beta]$ (cp. 81.2, 81.3). (En las sentencias anteriores y en las sucesivas, las letras griegas 'γ', 'μ', 'ν', 'ξ' se usan como las letras itálicas con fines metalingüísticos. Ver 08.3-08.8 y especialmente 08.7.)

84.4. La definición de 84.2 sólo puede usarse para sumar un número finito de clases. Para sumar una infinidad de clases debe definirse un tipo más elaborado de suma, en relación con una clase de clases κ finita o infinita. '$\Sigma'\kappa$' se denomina *suma aritmética de la clase de clases* κ y es

una clase cuyo número cardinal es la suma aritmética de los números cardinales de los miembros de κ. 'Σ' se define de tal modo que $\Sigma`\kappa = s`[\epsilon \downarrow ``\kappa]$ ([PM] * 112.01), y de suerte que $`(\Sigma`\kappa)$ denota la clase de todos los pares ordinales de la forma $x \downarrow \alpha$ tal que α es miembro de κ y x es miembro de α. (Cp. 66.32.) Claramente el número cardinal de $\Sigma`\kappa$ es la suma de los números cardinales de los miembros de $\kappa$. $`(\Sigma Nc`\kappa)$ es una abreviación de $`(Nc`\Sigma`\kappa)$ y denota la suma de los números cardinales de las clases que son miembros de κ.

84.5. El producto aritmético de dos clases α y β se escribe como $`(\beta \times \alpha)$, que se define como $s`[\alpha \downarrow ``\beta]$ en [PM] * 113.02. Esto es la clase de todos los pares ordinales tales que el primer elemento pertenece a α y el segundo a β (65.7), de modo que el número de miembros de $\beta \times \alpha$ es el producto del número de miembros de α con el número de miembros de β. (En [PM] * 113, se usa la notación $`(\beta \times \alpha)$ en vez de $`(\alpha \times \beta)$ a causa de ciertas analogías con los productos en aritmética de relaciones.) (Ver 08.9 con respecto a 's'.)

84.6. El producto aritmético de dos cardinales se denotará por medio de $`(\mu \times_0 \nu)$, que se define como $(\hat{\xi}(\exists\alpha)(\exists\beta)[[\mu = Nc`\alpha] . [\nu = Nc`\beta] . [\xi \text{ sm } [\alpha \times \beta]])$ ([PM] * 113.03). Así si $\mu = Nc`\alpha$ y $\nu = Nc`\beta$, entonces $[\mu \times_0 \nu] = Nc`[\alpha \times \beta]$.

84.7. La definición de 84.5 puede usarse para la multiplicación de un número finito de clases solamente. Para multiplicar un número infinito de clases debe definirse un tipo más elaborado de multiplicación, aplicable a cualquier clase κ finita o infinita. Podemos considerar $\epsilon_\Delta`\kappa$, la clase de las relaciones selectivas de $\kappa$ (66.31), como el producto aritmético requerido de la clase de clases $\kappa$. Puede demostrarse que el número cardinal de $\epsilon_\Delta`\kappa$ es el producto aritmético de los números cardinales de los miembros de κ. $`(\Pi Nc`\kappa)$ es una abreviación de $`(Nc`\epsilon_\Delta`\kappa)$ ([PM] * 114.01) y denota el producto de los números cardinales de las clases que son miembros de κ.

84.8. La exponenciación aritmética de la clase α a la clase β se escribe $`(\alpha \exp \beta)$ y se define de tal forma que su número cardinal es el número cardinal de $\alpha$ elevado a la $\nu$-ésima potencia, donde $\nu$ es el número cardinal de $\beta$. Con el fin de definir $`(\alpha \exp \beta)$, definimos en primer lugar 'Prod' de tal modo que $Prod`\kappa = D``\epsilon_\Delta`\kappa$. Así $`(Prod`\kappa)$ denota la clase de todas las clases que son clases seleccionadas a partir de κ (66.11, 66.31). Si κ es

una clase de clases mutuamente exclusivas, entonces D''$\in_\Delta$'κ tendrá el mismo número cardinal que $\in_\Delta$'κ, es decir, el producto de los números cardinales de los miembros de κ (84.7). Si tomamos κ como la clase $\alpha\downarrow''\beta$ (65.7), entonces κ es una clase de clases mutuamente exclusivas cada una de las cuales tiene el mismo número de miembros que α, y κ tiene el mismo número de miembros que β. Por tanto Prod'$[\alpha\downarrow''\beta]$ tiene μ^ν miembros, donde μ es el número cardinal de α y ν es el número cardinal de β. Por tanto podemos definir '$\alpha \exp \beta$' como 'Prod'$[\alpha\downarrow''\beta]$' ([PM] * 116.01) y podemos definir 'μ^ν' como '$\hat{\gamma}(\exists\alpha)(\exists\beta)[[\mu = \mathrm{Nc}'\alpha] . [\nu = \mathrm{Nc}'\beta] . [\gamma \mathrm{sm} [\alpha \exp \beta]]]$' ([PM] * 116.02).

85. Definición de números de relación por similitud ordinal

85.1. En [PM] * 150 — * 183 se desarrolla una teoría de números de relación de un modo paralelo a la teoría de números cardinales de [PM] * 100 — * 126. Esta teoría de números de relación es una generalización y extensión de la teoría de los números ordinales desarrollada por G. Cantor (*Mathematische Annalen,* Vol. 46 (1895), pp. 481-512; Vol. 49 (1897) pp. 207-246). Algunos de los conceptos principales y símbolos usados en [PM] se describirán brevemente a continuación.

85.2. Dos relaciones se denominan *similares* (o *similares ordinalmente*) si existe una correspondencia uno a uno entre sus campos que mantiene la ordenación de los campos impuesta por las dos relaciones. Así si la relación P relaciona x_1 con x_2, y x_2 con x_3, y no relaciona ningún otro, y si la relación Q relaciona y_1 con y_2, e y_2 con y_3, y no relaciona ningún otro, podríamos establecer una correspondencia uno a uno del tipo requerido tomando una relación uno-uno S (64.33) que relacione x_1 con y_1, y x_2 con y_2, y x_3 con y_3. Así S proporciona una correspondencia uno a uno del campo de P con el campo de Q. Al decir que S mantiene la ordenación de los dos campos (impuesta por P y por Q respectivamente) significamos que si a mantiene la relación P con b entonces el objeto con el que a se relaciona por S mantiene la relación Q con el objeto con el que b se relaciona por S. Por tanto los miembros del campo de P se relacionan por P del mismo modo exactamente en que sus correlatos S del campo de Q se relacionan por Q. Más específicamente, P es similar (ordinalmente) a Q si y sólo si existe una relación uno-uno S que tiene el campo

de Q como dominio converso y que es tal que $P = S|Q|\check{S}$. Esta última condición proporciona que (para todo a y b) a mantiene la relación P con b si y sólo si a mantiene la relación S con algún objeto (el correlato S de a) que mantiene la relación Q con algún objeto (el correlato S de b) con el que b mantiene la relación S. A un S tal lo llamamos *correlator ordinal* de P con Q. La clase de correlatores ordinales de P con Q se escribe 'P $\overline{\text{smor}}$ Q', y definimos 'P $\overline{\text{smor}}$ Q' como '$\hat{S}[[S \in 1 \rightarrow 1] . [C'Q = \breve{C}'S] . [P = S;Q]]$' ([PM] * 151.01), donde '$S;Q$' es una abreviación de '$S|Q|\check{S}$' (66,27). Así como $\alpha = R''\beta$ en caso de que R sea un correlator cardinal de α con β (81.1), de modo que α es un mapa o proyección de β mediante R, así también $P = S;Q$ en caso de que S sea un correlator ordinal de P con Q, de modo que P es el mapa o proyección de Q mediante S (66.27). (Ver 08.9 con respecto a 'C'.)

85.3. Se dice que las relaciones P y Q son similares ordinalmente (o relacionalmente) si existe una relación S que es un correlator ordinal de P con Q, es decir, si la clase P $\overline{\text{smor}}$ Q no es vacía. Por tanto la relación de similitud ordinal (o relacional), denotada por medio de 'smor', puede definirse considerando 'smor' como una abreviación de '$\hat{P}\hat{Q}[\exists!P$ $\overline{\text{smor}}$ $Q]$' ([PM] * 151.01).

85.4. Así como el número cardinal de una clase α es la clase de clases similares a α, así también el *número de relación* de una relación Q es la clase de las relaciones ordinalmente similares a Q. Por tanto podemos considerar Nr'Q (el número de relación de Q) como $\hat{P}[P$ smor $Q]$ ([PM] * 152.1) y NR (la clase de los números de relación) como $\hat{P}(\exists Q)\,[P = \text{Nr}'Q]$, es decir, como D'Nr ([PM] * 152.02).

85.5. Con el fin de describir una clase especial de números de relación conocida como *números ordinales* es necesario explicar qué se entiende por *serie* y en particular, por *serie bien ordenada,* ya que los números ordinales son números de relación de series bien ordenadas. Una serie es una relación que es irreflexiva (es decir, nunca relaciona un objeto consigo mismo, y por tanto es una subrelación de J, la relación de no-identidad (64.12)), transitiva (61.7), y conectada (64.15). Así la clase de relaciones de series Ser es Rl'$J \cap$ trans $\cap$ connex (66.05, [PM] * 204.01). Se dice que una relación P es *bien ordenada* si toda subclase no vacía de su campo tiene un miembro *P-mínimo,* es decir, un miembro que mantiene la relación P con algún miembro de la clase pero con el que ningún miembro de la clase mantiene la relación P. La clase de las relaciones

bien ordenadas se denota por medio de 'Bord', donde 'Bord' es una abreviación de '$\hat{P}$[Cl ex'C'$P \subset$ Cl'$\min_P$]' ([PM] * 250.01) y donde Cl ex'α = $\hat{\beta}$[[$\beta \subset \alpha$] . $\exists ! \beta$] ([PM] * 60.13) y donde $\min_P = \hat{x}\hat{\alpha}[x \in [\alpha \cap [C'P - \breve{P}''\alpha]]]$ ([PM] * 93.02). La clase de las series bien ordenadas se denota por medio de 'Ω', donde 'Ω' es una abreviación de 'Ser $\cap$ Bord' ([PM] * 250.02). La clase de los números ordinales se denota por medio de 'NO', donde 'NO' es una abreviación de 'Nr''Ω' ([PM] * 251.01). Por tanto los números ordinales son números de relación de series bien ordenadas. (Ver 08.9 con respecto a 'C' y 'J'.)

86. Operaciones aritméticas con números de relación

86.1. Las definiciones sobre las que vamos a tratar son estrechamente paralelas a las de 84. En cada caso se construye en primer lugar una operación con relaciones; y después se define el resultado de esta operación con números de relación como el número de relación del resultado de la operación con relaciones. Pero hay dos diferencias fundamentales con respecto a 84: (1) Las operaciones con relaciones reemplazan a las operaciones con clases. [PM] usa la operación denotada por ';' (66.27) en vez de la operación denotada por '"' (63.4). (2) El resultado de la operación no es una clase mayor sino una relación. Burdamente hablando, las relaciones se colocan una después de otra (en las sumas) o entrelazadas (en los productos y potencias); esto implica complicaciones en las definiciones. Se omitirán los detalles.

86.2. La *suma* de dos relaciones P y Q (omitiendo algunos casos especiales ([PM] * 161 y * 181)) se denota por medio de '$P \dagger Q$' ([PM] * 160.01). Se construye añadiendo, por decirlo así, la relación Q después de la relación P. El número de relación de $P \dagger Q$ es la suma (en el sentido de '+' de a continuación) de los números de relación Nr'P y Nr'Q con tal que P y Q no se solapen. Entonces se define una suma $P + Q$ que proporciona el resultado deseado si P y Q se solapan ([PM] * 180.01). Si μ y ν son los números de relación de P y Q respectivamente, entonces $\mu + \nu$ (suma de números de relación) es el número de relación Nr'[$P + Q$]. La suma $\Sigma'P$, que es la suma de las relaciones del campo de P ([PM] * 162.01) es la análoga de $\Sigma'\kappa$ (84.4). La suma ΣNr'P ([PM] * 183.01), que es la suma de los números de relación de las relaciones del campo de P, es la análoga de ΣNc'κ (84.4).

86.3. El producto $Q \times P$ de dos relaciones P y Q se toma como $\Sigma`[P\underset{,,}{\downarrow};Q]$ ([PM] * 166.01). Esta es la análoga de $s`[\alpha\underset{,,}{\downarrow}``\beta]$ (84.5). Si μ y ν son los números de relación de P y Q respectivamente, entonces $\mu \dot{\times} \nu$ (producto de números de relación) es $\mathrm{Nr}`[P \times Q]$. El producto $\Pi`P$ de las relaciones del campo de P ([PM] * 172.01) es el análogo de $\epsilon_\Delta`\kappa$ (84.7). El producto $\Pi\mathrm{Nr}`P$ ([PM] 185.01) de los números de relación de las relaciones del campo de P es $\mathrm{Nr}`\Pi`P$ y es el análogo de $\Pi\mathrm{Nc}`\kappa$ (84.7). (Ver 08.9 con respecto a 's'.)

86.4. En cuanto a la *exponenciación,* $\mathrm{Prod}`P$ ([PM] * 173.01) es la análoga de $\mathrm{Prod}`\kappa$ (84.8). P éxp Q se toma como $\mathrm{Prod}`[P\underset{,,}{\downarrow};Q]$ ([PM) * 176.01) y es la análoga de $\alpha \exp \beta$ (84.8). Finalmente, si $\mu$ y $\nu$ son los números de relación de $P$ y $Q$ respectivamente, entonces $\mu \exp_r \nu$ (*exponenciación de números de relación*) es $\mathrm{Nr}`[P \exp Q]$ ([PM] * 186).

CAPITULO 9

METAMATEMATICA

90. El objeto de la metamatemática

90.1. Hemos discutido en capítulos anteriores sistemas (lógico-matemáticos) de distintos tipos. Algunos sistemas pueden considerarse como sistemas de símbolos no interpretados, otros pueden considerarse como sistemas de símbolos interpretados, y aun otros, quizá, pueden considerarse como sistemas de conceptos (o significados) de abstracción total o parcial a partir de cualesquiera símbolos que se emplean para expresar estos conceptos. Un discurso acerca de sistemas específicos, o acerca de sistemas en general, en uno de los tres sentidos anteriores o en todos ellos, podría describirse como discurso *metamatemático* o *metalógico,* y el lenguaje usado en tal discurso podría denominarse *metalenguaje* (08.1). A continuación consideramos inicialmente los sistemas como sistemas de símbolos interpretados o no interpretados. El estudio formal de los símbolos de sistemas bien en sus relaciones con algún otro *(sintaxis)* o bien en sus relaciones con significados asignados (*semántica*) se denomina *metamatemática* o *metalógica.*

90.2. Decir que una sentencia determinada (considerada como una serie de símbolos) *puede probarse* en un sistema formal dado significa que existe una prueba de esa sentencia; es decir, que existe una secuencia de sentencias cuyo último término es la sentencia dada y cada uno de cuyos términos es o un axioma del sistema o deducible a partir de términos precedentes (o a partir de una clase de términos precedentes) de la secuencia mediante las reglas de deducción (reglas inderivadas de inferencia del sistema (01.12)). Así en un sistema dado la probabilidad es una

propiedad de sentencias (no, por ejemplo, de lo que pueden expresar) y por tanto es un concepto metamatemático. La noción de probabilidad es una noción sintáctica en vez de una noción semántica (01.13), ya que es definible sin hacer referencia al significado.

90.3. Decir que una sentencia determinada es *verdadera* en un sistema dado hace referencia a una *interpretación* de ese sistema, es decir, a una relación entre los símbolos del sistema y las entidades con las que trata por el sistema (o significados asignados a los símbolos del sistema). La noción de verdad es por tanto una noción metamatemática, y específicamente una noción semántica. A veces es posible definir nociones semánticas en términos sintácticos. Por ejemplo, si *S* es uno de los sistemas interpretados usuales, la noción *verdadero en S* puede definirse sintácticamente, es decir, mediante referencia a símbolos y combinaciones de símbolos simplemente, sin ninguna mención a los objetos o significados denotados o expresados por los símbolos. Sin embargo, la investigación de tales posibilidades de definición aun se considera parte de la semántica en vez de parte de la sintaxis. Uno de los resultados principales de esta parte de la metamatemática es el resultado de Tarski (IX 68), de que para cualquiera de los sistemas interpretados *S* usuales, la noción *verdadero en S,* aunque sintácticamente es definible, no es definible dentro de *S*.

90.4. Las investigaciones en sintaxis giran principalmente en torno al problema de consistencia. Un sistema se define como consistente (específicamente Post-consistente) cuando no toda sentencia de ese sistema puede probarse (cp. [Ch] 108), y la noción de probabilidad, como hemos visto antes, es una noción de sintaxis. La cuestión de consistencia, y en particular el problema de probar la consistencia de un sistema formal adecuado a las matemáticas clásicas, es un problema central en los fundamentos de las matemáticas. David Hilbert (cp. 1085) fundó la metamatemática con el fin de resolver este problema. Sin embargo, tan pronto como se enuncia este problema aparece una dificultad. Si esperamos probar la consistencia de las matemáticas por medio de un estudio matemático de los símbolos y sus propiedades y relaciones, nuestro procedimiento es probablemente circular. Pues suponemos la consistencia de las matemáticas que usamos en la prueba de consistencia. Considerando esta dificultad, Hilbert se vio forzado a restringir los instrumentos matemáticos que debían usarse en su prueba de consistencia a ciertos métodos extremadamente elementales cuya infalibilidad se considera más

allá de toda duda. A estos métodos los llamó *métodos finitarios.* Muchos lógicos (Hilbert, Kleene) usan el término *metamatemática* para referirse únicamente a las investigaciones de sintaxis (y, en un grado ligero, semántica) por medio de tales métodos. Sin embargo, usamos la palabra a lo largo de todo este capítulo en el sentido más amplio antes supuesto (90.1).

90.5. Para concluir este breve estudio de algunos resultados importantes y problemas de metamatemática podemos mencionar las cuesiones concernientes a las relaciones entre nociones sintácticas y semánticas. Por ejemplo, llamamos *válida* a una fórmula del cálculo funcional de primer orden (Capítulo 2) o de orden superior (Capítulo 3) si es verdadera bajo la interpretación habitual de cuantificadores y conectivas y bajo *toda* interpretación de las letras funcionales. La noción de validez es claramente semántica, y es importante investigar su relación con la probabilidad. Relacionado con esto, Gödel ha probado que estas nociones coinciden para el cálculo funcional de primer orden en su formulación usual 4181) pero no para los cálculos funcionales de orden superior en cualquier formulación (4183). En otras palabras, un cálculo funcional de orden superior que no contenga ninguna fórmula inválida entre sus teoremas tiene que dejar de contener alguna fórmula válida, y la misma situación se obtendría después de añadir un número finito de axiomas.

91. Variables y constantes metamatemáticas

91.1. Para seguir la metamatemática de una forma rigurosa es necesario distinguir muy cuidadosamente entre una expresión y su nombre. De otro modo, debe hacerse una cuidadosa distinción entre el lenguaje objeto que se investiga y el metalenguaje en el que se realizan las investigaciones (08.1).

91.2. Debemos tener en cuenta que no es necesario que un metalenguaje riguroso haga uso exclusivamente de símbolos técnicos. De otro modo podríamos vernos envueltos en un círculo vicioso: sería necesario un simbolismo del metalenguaje para explicar rigurosamente la sintaxis o semántica del lenguaje objeto; después sería necesario el simbolismo de un meta-metalenguaje para explicar rigurosamente la sintaxis y semántica del metalenguaje, y así sucesivamente. Por el contrario, es opcional el uso de un simbolismo en el metalenguaje. Si el metalenguaje (tal y como lo presentamos) es una descripción y discusión

de símbolos, el lenguaje hablado es ordinariamente suficiente para evitar ambigüedad que conduzca a error. Y si se usa un simbolismo del metalenguaje, este simbolismo casi nunca será un simbolismo completamente formalizado; será comparable con el lenguaje técnico de las ciencias naturales. Si un lenguaje así hace uso de símbolos, será más en virtud de la brevedad que en virtud de la construcción de un cálculo. Por tanto, nuestra discusión de metalenguaje tendrá un carácter diferente de la discusión del lenguaje objeto, y solamente necesitamos tratar sobre símbolos aceptables, es decir, símbolos que no conducen a error ni son excesivamente complicados.

91.3. Pueden usarse distintos símbolos o expresiones del metalenguaje para denotar distintos símbolos o expresiones del lenguaje objeto. Un modo de construir un nombre en metalenguaje de una expresión de lenguaje objeto es colocar una comilla simple alrededor de la expresión del lenguaje objeto. Así el símbolo de lenguaje objeto escrito del modo siguiente,

A

se denota por la expresión de metalenguaje escrita del modo siguiente,

'A'.

Otro método es el adoptado por Tarski en algunas partes de su célebre artículo sobre la verdad en los lenguajes formalizados (28514). Se introducen nuevas expresiones especiales como nombres metalingüísticos de símbolos del lenguaje objeto del modo siguiente:

Símbolo de lenguaje objeto	Nombre de metalenguaje del símbolo de lenguaje objeto
I	*in* (signo de inclusión)
N	*ng* (signo de negación)
A	*sm* (signo de suma lógica)
Π	*un* (signo de cuantificador universal)
$x_{'}$	v_1 (primera variable)
$x_{''}$	v_2 (segunda variable)
$x_{'''}$	v_3 (tercera variable)
.	.
.	.
.	.

Para construir el nombre metalingüístico de una expresión de lenguaje objeto que consta de dos expresiones yuxtapuestas de lenguaje objeto (que ya tienen asignados nombres metalingüísticos), el procedimiento es el siguiente: Se escribe el nombre metalingüístico de la primera expresión yuxtapuesta del lenguaje objeto, después se escribe un trazo curvo (como una copa invertida), y después se escribe el nombre metalingüístico de la segunda expresión yuxtapuesta del lenguaje objeto. Puede aplicarse un método similar para tres o más expresiones yuxtapuestas. Por ejemplo, la expresión de lenguaje objeto escrita así,

$$NIx_r x_{rr}$$

se denota por medio de la expresión metalingüística escrita así

$$ng\frown in\frown v_1\frown v_2.$$

A veces se dice que una expresión formada por yuxtaposición de dos o más expresiones es una *concatenación* de tales expresiones. Se dice que la concatenación es binaria si se yuxtaponen únicamente dos expresiones. Puede considerarse claramente que cualquier concatenación es reducible a series de concatenaciones binarias. Puede considerarse que el trazo curvo denota concatenación binaria. La operación de concatenación binaria satisface la ley asociativa. (Las letras itálicas no funcionan en este parágrafo como metavariables sino que son parte de la notación real que se discute (cp. 08.9). De hecho a través de la sección 91 todas las expresiones expuestas son la notación real a que se hace referencia, excepto, naturalmente, las comas usadas para separar las expresiones expuestas o los tres puntos usados para indicar omisión en las expresiones expuestas.)

91.4. Las variables del lenguaje objeto se refieren normalmente a objetos matemáticos y lógicos (conjuntos, números, funciones, etc.), mientras las variables del metalenguaje se refieren a expresiones del lenguaje objeto. Las principales clases de variables del lenguaje objeto son variables individuales libres y ligadas (que se refieren a conjuntos y otros objetos inespecificados en [Q], a números y otros objetos inespecificados en [K] y [HB], y a objetos inespecificados en [Ch] y [HA]), variables proposicionales, y variables funcionales de funciones proposicionales. Las principales clases de variables metalingüísticas son variables que se refieren a términos del lenguaje objeto, variables que se refieren a

variables individuales (libres y ligadas) del lenguaje objeto, y variables que se refieren a fórmulas del lenguaje objeto.

91.5. A continuación se proporcionan algunas indicaciones sobre el uso de distintos autores.

91.51. En [PM] no hay ningún reconocimiento claro de la diferencia entre variables metalingüísticas y variables del lenguaje objeto.

91.52. En la escuela de Hilbert se usan letras latinas para variables del lenguaje objeto y letras góticas para el metalenguaje. En [HA] las únicas letras góticas que se usan son

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$$

que se refieren a sentencias. [HB] añade a éstas

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$$

que se refieren a variables individuales libres,

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$$

que se refieren a variables individuales ligadas, y

$$\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \ldots$$

que se refieren a términos.

91.53. [Q] tiene letras latinas (69) para el lenguaje objeto y letras griegas para las variables del metalenguaje, a saber:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

que se refieren a variables individuales (75),

$$\varphi, \psi, \chi, \ldots$$

que se refieren a enunciados (35), y

$$\xi, \eta, \sigma, \ldots$$

que se refieren a términos (135).

91.54. [K] usa letras latinas para el metalenguaje, a saber,

x, y, z, ...

que se refieren a variables individuales (146),

A, B, C, ...

que se refieren a sentencias (139), y

r, s, t, ...

que se refieren a términos. Las variables del lenguaje objeto para [K] son

a, b, c, ...

que se refieren a individuos, y

$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$

que se refieren a sentencias y funciones.

91.55. [Ch] usa letras latinas itálicas para el lenguaje objeto y negritas para el metalenguaje, a saber, letras latinas negritas minúsculas

a, b, c, ...

que se refieren a constantes primitivas y variables del lenguaje objeto (60), y letras latinas mayúsculas negritas

A, B, C, ...

que se refieren a fórmulas bien formadas del lenguaje objeto (60). En [Ch] también se hace uso de letras griegas negritas, a saber, letras griegas minúsculas negritas

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \ldots$

que se refieren a símbolos primitivos del lenguaje objeto (60), y griegas mayúsculas negritas

$\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \ldots$

que se refieren a expresiones del lenguaje objeto.

91.56. En [R] todas las variables pueden considerarse como variables del metalenguaje (cp. [R] 82 ff.).

92. Designaciones de clases de símbolos y clases de entidades

92.1. Frecuentemente en los trabajos de Carnap, los símbolos en letra gótica son nombres de clases de símbolos y a veces de clases de entidades. Los principales se exponen a continuación en orden alfabético. Estos símbolos se encuentran en Carnap IV 82. Se indica el número de páginas.

𝔄	Expresión finita (*Ausdruck*) (17)
𝔞	Símbolo (17)
𝔄𝔣𝔲	Función expresiva (*Ausdrucksfunction*) (191)
𝔄𝔤	Estructura expresiva (*Ausdruckgerüst*) (187)
𝔄𝔯𝔤	Serie de argumento (26, 187)
𝔣	Variable de funtor (84)
𝔉𝔲	Expresión de funtor (84)
𝔣𝔲	Funtor (17, 188)
𝔎	Clase de expresiones (37)
𝔨	Constante (84)
𝔒𝔭	Operador (191)
𝔭	Variable de predicado (195)
𝔭𝔯	Predicado (17, 188)
𝔖	Sentencia (*Satzformal*) (25)
𝔰	Variable sentencial (84)
𝔰𝔞	Símbolo sentencial (84)
𝔖𝔣𝔲	Función sentencial (*Satzfunktion*) (191)
𝔖𝔤	Estructura sentencial (*Satzgerüst*) (187)
𝔙	Expresión de variable (191)
𝔳	Variable (194)
𝔳𝔢𝔯𝔣𝔲	Símbolo de junción (*Verknüpfungszeichen*) (17)
𝔙𝔨	Junción sentencial (201)
𝔳𝔨	Símbolo de junción (201)
3	Expresión numérica (*Zahl*) (205)
𝔷	Variable numérica (17)
𝔷𝔣𝔲	Funtor numérico (205)
𝔷𝔭𝔯	Predicado numérico (205)
𝔷𝔷	Símbolo numérico (Numeral) (*Zahlreichen*) (26)

92.2. Los símbolos de la lista precedente propiamente son abreviaciones simplemente de los términos técnicos mencionados. Se añaden superes-

critos para indicar diferencias de tipo y orden. Pero también se usan los mismos símbolos, por ejemplo, en el axioma esquema, como variables metalingüísticas en el sentido de 91; entonces se añaden suscritos para distinguir diferentes variables de la misma clase.

92.3. Como en el caso de otras variables metalingüísticas, Carnap emplea las conectivas del lenguaje objeto para unir estas expresiones que sirven como variables metalingüísticas. Esto proporciona un modo fácil para referirse a expresiones arbitrarias del lenguaje objeto de una forma algo especial (cp. 93.4 siguiente). Por ejemplo, la *disyunción de dos sentencias* puede expresarse por medio de

$$\mathfrak{S}_1 \vee \mathfrak{S}_2.$$

93. Designación de expresiones

93.1. En castellano ordinario hay dos modos de construir el nombre de una expresión, ilustrados en las dos sentencias siguientes:

(1) Rosa es un nombre.

(2) 'Rosa' es un nombre.

En el primero de estos modos, llamado por Carnap modo autónimo de hablar (IV 82), una expresión se usa como nombre de sí misma. En el segundo, el nombre de una expresión se construye colocando esa expresión entre comillas. El primer método se usa en metamatemática por todos los lógicos cuyo uso se menciona en 91, excepto por Quine, que prefiere el segundo. El presente Diccionario coincide con Quine en el uso del segundo método (cp. 08). Aunque el primer método es tanto el más simple como el más usual de los dos, su empleo requiere que se observen ciertas precauciones. La principal de éstas es que *ninguna variable del lenguaje objeto pueda,* sin riesgo de ambigüedad o contradicción, *servir también como una variable del metalenguaje,* y de modo más general, que ninguna expresión del lenguaje objeto pueda funcionar en el metalenguaje de otro modo que no sea como una designación autónima de sí misma. Por ejemplo, conjuntada con la sentencia (1) anterior (en la que el castellano es a la vez lenguaje objeto y metalenguaje) la verdad evidente

(3) Rosa es una especie botánica,

puede proporcionar la conclusión absurda de que algunos nombres son especies botánicas, y esto es porque 'rosa' se usa a la vez como nombre en el lenguaje objeto y como designación autónima en el metalenguaje.

Para tomar un ejemplo formal, si '*x*' e '*y*' se usan como variables del lenguaje objeto y del metalenguaje, y si también se usan en el último como designaciones autónimas (constantes) referidas a variables del lenguaje objeto, nos encontramos en la duda de cómo interpretar una sentencia como

(4) Si *x* es una variable, entonces *x* se llama libre en *y* si...

¿Estamos tomando, por ejemplo, la primera '*x*' de esta sentencia como autónima? Si es así, la sentencia sería sinónima de:

(5) Si la vigésimocuarta letra minúscula del alfabeto es una variable, entonces...

¿O estamos tomando esta primera '*x*' en (4) como una variable del metalenguaje? En este caso la sentencia sería sinónima de:

(6) Si algo es una variable, entonces se llama libre en una expresión si....

Siempre que una variable del lenguaje objeto es simultáneamente una variable del metalenguaje, es fácil que ocurran confusiones de este tipo. De modo similar surgen confusiones cuando una expresión del lenguaje objeto aparece de forma no autónima en el metalenguaje. La forma general de la ambigüedad que surge en tales casos se refleja en la pregunta: ¿debe proporcionar la expresión el significado que tiene cuando se usa en el metalenguaje no autónimamente, o debería construirse la expresión autónimamente? Tal ambigüedad puede evitarse de dos modos: 1) prohibiendo totalmente la autonimación, o 2) prohibiendo que las expresiones del lenguaje objeto aparezcan en el metalenguaje de modo que no sea autónimo. Quine elige la primera de estas alternativas. Kleene y otros muchos eligen la última.

93.2. En el uso de Kleene, a pesar del uso autónimo de expresiones, es imposible que surja confusión. (El uso de [HA], [HB] y [Ch] es suficientemente similar al de [K], no requiere una discusión separada.) Si Kleene hubiera deseado que la sentencia (4) anterior se interpretase en el primero de los modos mencionados (la forma autónima), la hubiera dejado tal como se enuncia. Entonces la sentencia es bastante irrelevante porque la letra '*x*' no es libre en la letra '*y*'; de hecho nada es libre en '*y*' salvo 'y' mismo. El segundo sentido de la sentencia (4) anterior —la interpretación dada como (6) (el sentido importante de no autónimo)— se convertiría en la notación de Kleene (91.54) en

(7) Si *x* es una variable, entonces *x* se denomina libre en *A* si...

93.3. Por otra parte, el método de Quine permite el uso de cualquier estilo de variable en el metalenguaje. En esta notación la sentencia (4)

sólo puede tener la interpretación no autónima. Realmente, Quine podría escribir más fácilmente (91.53):

(8) Si α es una variable, entonces α se denomina libre en φ si....

Pero no obstante, desde el punto de vista de Quine (4) es perfectamente correcto e inambiguo. La idea expresada en la notación de Kleene por (4) debería expresarse en la notación de Quine (y además en la notación de este Diccionario) por:

(9) Si '*x*' es una variable, entonces '*x*' se denomina libre en '*y*' si....

93.4. Aparece una dificultad en la traducción de las sentencias como:

(10) El resultado de escribir una sentencia seguida de '&' seguido por una sentencia, es a su vez una sentencia.

Un modo natural de escribirlo sería:

(11) Si A y B son sentencias, también lo es A & B.

O quizás

(12) Si 'A' y 'B' son sentencias, también lo es 'A & B'.

Realmente, ninguna de estas notaciones es correcta a menos que se haga una convención especial. Kleene y todos los autores antes mencionados, excepto Quine, hacen tal convención especial en favor de (11). Evidentemente en (11) 'A' y 'B' se usan como variables del metalenguaje (por tanto no autónimamente) pero se combinan con la ayuda de '&' que es un símbolo del lenguaje objeto. Este procedimiento no ofrece ninguna difificultad si adoptamos la convención de que '&' puede usarse en el metalenguaje para denotar una función que aplicada a dos sentencias proporciona el resultado de la unión de esas dos sentencias por medio de '&'. Esta convención también se aplicaría naturalmente a los operadores en general del mismo modo que a '&'.

93.5. Kleene establece sistemáticamente esta convención, de modo que en su notación (11) está totalmente en orden. Más específicamente, si una expresión ininterrumpida *E* que aparece en el metalenguaje se compone en parte de expresiones del lenguaje objeto y en parte de variables del metalenguaje, la expresión debe considerarse referida a los resultados de escribir las expresiones del lenguaje objeto mencionadas mediante esas variables en vez de a las variables metalingüísticas de *E* correspondientes.

93.6. La traducción (12) de (10) es difícil de justificar. Pues en (12) no está claro cómo operan las comillas. Si 'A' y 'B' son expresiones del lenguaje objeto, la sentencia pierde su pretendida generalidad; si no lo

son, ¿por qué están entre comillas? No obstante, un método alternativo y perfectamente preciso de designación de expresiones empleado por Quine está más cerca de este tratamiento que del tratamiento de Kleene. El principio básico de esta notación es el siguiente: Si una expresión x aparece en el metalenguaje, si la expresión empieza por '⌜' y termina por '⌝' (*cuasi-comillas,* [Q] 33 ff.) y si entre estas cuasi-comillas no aparece nada que no sea una variable (letra griega) del metalenguaje o una constante del lenguaje objeto, entonces x debe considerarse referido a los resultados de escribir las expresiones del lenguaje objeto aludido mediante las mencionadas variables del metalenguaje en lugar de las variables metalingüísticas respectivas a lo largo de x, y colocando después cuasi-comillas. Las cuasi-comillas pueden omitirse en el caso límite de que x conste de una sola letra griega. En este Diccionario se conservan las comillas especiales, que son análogas a las cuasi-comillas de Quine (cp. 08.4), incluso en este caso límite. Además, en este Diccionario, los valores de las variables metalingüísticas pueden ser cualquier expresión y no meramente las expresiones de algún lenguaje objeto especificado. Por ejemplo, pueden ser expresiones de los distintos metalenguajes expuestos, como en los apartados 91 y 92 anteriores.

94. Sustitución

94.1. La sustitución de 'x' por 't' en 'A' puede enunciarse explícitamente de distintos modos. [R] (209) escribe '{Sub in A: t for x}'; [CF] (94) escribe el prefijo '$[t/x]$' delante de 'A'; [Ch] (72) escribe '$S^x_t A$'.

94.2. [K] (78) escribe '$A(x)$' en vez de 'A' y después denota el resultado de sustituir 'x' libre en 'A' por 't' mediante '$A(t)$'. (Las comillas especiales usadas aquí no aparecen en la notación metalingüística de Kleene.) Sin embargo, puede surgir ambigüedad si no se hace una determinada convención. [K] (78) establece la convención requerida del modo siguiente. Si '$A(a)$', '$A(b)$', '$A(c)$', ..., ocurren en un discurso determinado donde 'A' es una variable metalingüística que tiene como valores fórmulas del lenguaje objeto, de las cuales, *la primera que ocurre,* digamos, '$A(b)$', se refiere a una fórmula arbitraria del lenguaje objeto (sometida a algunas limitaciones impuestas por el discurso) en la que, a menos que se establezcan expresamente, 'b' no es necesariamente libre. Y cualquier fórmula metalingüística subsiguiente, por ejemplo, '$A(c)$', se refiere al resultado de sustituir 'b' (libre) en '$A(b)$' por 'c' en vez de, por ejemplo, al resultado de sustituir 'a' en '$A(a)$' por 'c'.

94.3. Con la sustitución a realizar en distintas variables, debe determinarse el orden de sustitución. Si la sustitución se indica por medio de una serie de prefijos, bajo una forma tal como ⌜[a/x] [b/y]A⌝ (94.1) se entiende que las sustituciones indicadas por los prefijos más cercanos a ⌜A⌝ preceden a las sustituciones indicadas por los prefijos más lejanos de ⌜A⌝. La notación de [R] (209) es tal que si ⌜x_1⌝, ..., ⌜x_n⌝ son variables y ⌜A_1⌝, ..., ⌜A_n⌝ son términos, entonces ⌜{Sub in S: A_1 for x_1, A_2 for x_2, ..., A_n for x_n}⌝ se refiere al resultado de sustituir en ⌜S⌝ simultáneamente ⌜x_1⌝ por ⌜A_1⌝, ⌜x_2⌝ por ⌜A_2⌝, ..., ⌜x_n⌝ por ⌜A_n⌝.

94.4. Una notación similar a la de 94.2 se usa en relación con la sustitución de variables distintas, como ⌜$A(x_1, \ldots, x_n)$⌝. Tanto en este caso como en el caso en que sólo hay una variable que, sin embargo, ocurre varias veces, se requiere que todas las sustituciones se realicen simultáneamente y no sucesivamente. Una notación similar se usa en [HA] (69) y [HB] (88).

95. Demostrabilidad y derivabilidad

95.1. Ya se advirtió antes (90.1, 90.2) que los tópicos más importantes de la metamatemática se centran alrededor de la *derivabilidad* y en particular la *demostrabilidad* (derivabilidad a partir de axiomas). Por ejemplo, bajo una definición común de consistencia, se dice que un sistema es consistente si no todas las fórmulas bien formadas del sistema son teoremas (cp. 90.4).

95.2. Para indicar que cierta fórmula es un *teorema* de un sistema determinado, se usa el símbolo metalingüístico '⊢'. Este signo puede ser seguido bien por la fórmula en cuestión o bien por una designación metamatemática (metalingüística) de todos los teoremas de una forma dada. En el último caso, la expresión que sigue a '⊢' se denomina teorema esquema en vez de teorema. El signo '⊢' se llama frecuentemente símbolo de aseveración. Para su uso en [Q] ver el apartado 21.7 anterior.

95.3. Además del uso de '⊢' antes expuesto, se usan notaciones tales como

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

para indicar que la expresión de la derecha es derivable mediante reglas determinadas a partir de las expresiones de la izquierda ([R] 123).

96. La deducción dentro de un sistema

96.1. El concepto de *derivabilidad* está estrechamente relacionado con los conceptos de axioma, teorema y regla de inferencia (01.12). De hecho, la probabilidad (90.2) puede considerarse como un caso especial de derivabilidad. Decir que una fórmula 'b' es derivable en un sistema formal a partir de las fórmulas 'a_1', 'a_2', ..., equivale a decir que existe una secuencia de fórmulas tales que cada fórmula de la secuencia es una de las fórmulas 'a_1', 'a_2', ..., o es un axioma, o es una consecuencia directa de una o más de las fórmulas precedentes de la secuencia mediante la aplicación de una de las reglas (inderivadas) de inferencia del sistema formal, y tal que 'b' es la última fórmula de la secuencia. (La derivabilidad a partir de clases vacías de fórmulas puede considerarse equivalente a probabilidad.) La derivabilidad de una fórmula a partir de una o más fórmulas distintas se expresa a veces mediante el uso de una línea horizontal colocada de modo que la fórmula derivable aparece bajo la línea y las fórmulas a partir de las cuales se deriva aparecen sobre la línea (cp. [HB] (i 82)). Por ejemplo, las expresiones

$$\frac{\mathrm{A}}{\sim\sim\mathrm{A}}$$

y

$$\frac{\mathrm{A} \quad \mathrm{A} \supset \mathrm{B}}{\mathrm{B}}$$

indicarían respectivamente que '$\sim \sim$ A' es derivable a partir de 'A', y que 'B' es derivable a partir de 'A' y de 'A $\supset$ B'. Curry (cp. [CF] 381) expresaría estas mismas ideas mediante el uso de una flecha, por ejemplo del modo siguiente:

$$\mathrm{A} \rightarrow \sim\sim\mathrm{A}$$

Puede usarse un tipo similar de notación mediante el empleo de variables metalingüísticas para expresar *esquemas de deducción*. Por ejemplo, la expresión

$$\frac{\mathscr{A} \quad \mathscr{B}}{\mathscr{A} . \mathscr{B}}$$

se usaría como esquema de deducción indicando que, en algún sistema formal, la conjunción de dos fórmulas es siempre derivable a partir de

las fórmulas mismas. Aquí '$\mathscr{A}$' y '$\mathscr{B}$' se considerarían como variables del metalenguaje y se referirían a fórmulas del sistema formal (cp. 93.4).

96.2. La deducción natural se representa ordenando premisas y conclusión de cada paso deductivo como en la notación de [HB] de 96.1. En cada caso debe decidirse a partir del contexto si la deducción conduce a una aseveración libre de cualquier hipótesis o sólo a una aseveración bajo hipótesis.

96.3. En [F] (14), con el fin de ser más explícito, se traza una línea vertical a la izquierda de todos los pasos de la deducción que conducen a una conclusión a partir de las hipótesis. Se coloca un signo especial '—' a la derecha de esta línea vertical e inmediatamente delante de la o las hipótesis. Distintas líneas verticales corresponden a distintas pruebas parciales subordinadas ([F] 20 ff.). Esta notación se debe originalmente a Jaśkowski (5141).

96.4. Los métodos L del cálculo inferencial usados por [K] y Curry siguiendo a Gentzen (4422) introducen enunciados de una forma especial, llamados *secuencias,* con una conectiva primitiva especial, escrita '$\rightarrow$' por Gentzen y [K] (44). Curry escribe '$\Vdash$' ([CF] 316) en vez de '$\rightarrow$'. Por ejemplo, podemos interpretar la expresión

$$A \rightarrow B$$

como

'A' implica 'B'.

Además, la expresión:

$$A, A', \ldots \rightarrow B$$

puede interpretarse como:

La conjunción de las fórmulas 'A', 'A'', ..., implica 'B'.

También la expresión:

$$A, A', \ldots \rightarrow B, B', \ldots$$

puede interpretarse como:

La conjunción de las fórmulas 'A', 'A'', ..., implica la disyunción de las fórmulas 'B', 'B'', ...

La expresión, si la hay, que precede a '$\rightarrow$' es el antecedente de la secuencia, y la expresión, si la hay, que sigue a '$\rightarrow$' es el consecuente de la se-

cuencia. Una coma en el antecedente debe traducirse como conjunción, y una coma en el consecuente como disyunción. Cuando el antecedente o el consecuente es vacío podemos interpretarlo, por ejemplo, del modo siguiente:

$$\rightarrow B$$

puede interpretarse como:

> 'B' es implicado por la conjunción de la clase vacía de fórmulas (y por tanto por cualquier fórmula, y por tanto es lógicamente verdadero).

De modo similar, la expresión:

$$B \rightarrow$$

puede interpretarse como:

> 'B' implica la disyunción de la clase vacía de fórmulas (y por tanto implica a toda fórmula, y por tanto es lógicamente falso).

Gentzen y [K] (88) usan mayúsculas griegas para referirse a series de cero, una, o varias fórmulas separadas por comas. Curry ([CF] 317) escribe mayúsculas góticas para tales series.

INDICE DE NOMBRES

ACKERMANN, Wilhelm, 10.44
AJDUKIEWICZ, Kasimierz, 32.3
ANDERSON, Alan R., 10.44, 12.35
ARISTOTLE, 14.1
BAR-HILLEL, Y., 09.5
BARCAN, Ruth (Mrs. J. A. Marcus), 14.3, 24.5
BELNAP, Nuel D., Jr., 10.44, 12.35
BERNAYS, Paul, 09.5, 12.2, 20.2, 80, 82.1, 82.2
BETH, E. W., 12.2
BOOLE, George, 09.1
BROUWER, L. E. J., 15.21, 15.27
BURKS, Arthur, 10.44
CANTOR, Georg, 85.1
CARNAP, Rudolf, 01.14, 09.1, 20.4, 32.4, 60.1, 64.13, 64.14, 64.15, 92.1, 92.3, 93.1
CHURCH, Alonzo, 02.1, 04.1, 04.2, 04.3, 04.4, 04.5, 05.8, 08.1, 12.35, 12.5, 12.7, 20.5, 21.4, 30.3, 32.2, 32.25, 32.26, 32.3, 32.6, 40.3, 40.4, 41.5, 44.1, 44.6, 44.7, 45.1
COUTURAT, Louis, 09.1
CURRY, Haskell B., 12.36, 12.7, 15.5, 42.7, 43.7, 44.6, 44.8, 45.2, 45.6, 46.1, 96.1, 96.4
FEYS, Robert, 12.33, 43.7, 63.4, 63.5, 63.9
FITCH, Frederic B., 14.2, 15.61, 15.62, 23.8, 31.3, 41.5, 43.8, 67.2
FRAENKEL, Adolf, 09.5, 80, 82.1
FREGE, Gottlob, 02.1, 04.1, 04.2, 04.3, 04.4, 04.5, 05.8, 09.1, 10.21, 26.42, 80, 81.3
GENTZEN, Gerhard, 12.2, 12.7, 21.1, 96.4
GÖDEL, Kurt, 09.5, 15.4, 50.2, 67.3, 70.1, 80, 82.1, 82.2, 90.5
HALL, M., 67.2
HALMOS, P. R., 09.2
HERMES, Hans, 12.2
HEYTING, Arend, 12.1, 12.2, 15.21, 15.27, 15.3, 24.3
HILBERT, David, 09.1, 12.2, 20.2, 90.4, 90.5, 91.52, 96.1
HOVLAND, C. I., 67.2
HULL, C. L., 67.2
HUNTINGTON, E. V., 09.1
JAŚKOWSKI, Stanisław, 96.3
JOHANSSON, Ingebrigt, 12.7, 15.5
KLEENE, Stephen C., 12.2, 15.3, 20.2, 77.1, 90.4, 93.1, 93.2, 93.3, 93.4, 93.5, 94.2
LEIBNIZ, Gottfried, 30.8, 53.4
LEŚNIEWSKI, Stanisław, 56.1
LEVIN, N. P., 12.33
LEWIS, Clarence I., 10.44, 14.1, 14.43, 14.45, 14.53
ŁUKASIEWICZ, Jan, 12.2, 13.21, 14.2, 16.6, 21.2
MARCUS, Mrs. J. A. (Ruth Barcan), 14.3, 24.5
PARRY, William T., 14.41
PEANO, Giuseppe, 16.42, 51.3, 71
PEIRCE, Charles S., 61.4
PERKINS, A. T., 67.2
PÉTER, Rózsa, 77.1
POST, Emil, 13.14, 13.41
PRIOR, Arthur N., 12.5
QUINE, Willard V., 08.4, 09.5, 21.7, 51.3, 54.53, 66.01, 66.04, 66.06, 66.14, 66.19, 81.3, 81.5, 81.6, 83.1, 93.1, 93.3, 93.4
REICHENBACH, Hans, 12.1
RICHARD, Jules, 50.4
ROSE, Alan, 13.41
ROSS, R. T., 67.2
ROSSER, J. B., 13.31, 13.42, 66.05, 66.13, 66.14, 81.5
RUSSELL, Bertrand, 02.2, 05.9, 09.1, 43.8, 50.4, 81.3, 81.5, 81.53, 83.1
SCHOLZ, Heinrich, 12.2

SCHRÖDER, Ernst, 09.1, 21.2, 60.1, 61.3, 61.4
SŁUPECKI, Jerzy, 13.42
SOBOCIŃSKI, Bolesław, 56.1
TARSKI, Alfred, 09.2, 12.2, 21.2, 90.3, 91.3
TURQUETTE, A. R., 13.31, 13.42
VON NEUMANN, J., 80, 82.1, 82.2
VON WRIGHT, Georg, 14.3, 14.53, 24.5
WAJSBERG, Mordechaj, 12.7
WHITEHEAD, Alfred N., 81.5, 83.1
WIENER, Norbert, 64.26
WOODGER, J. H., 66.16
ZAWIRSKI, Z., 13.14
ZERMELO, Ernst, 80, 82.1

INDICE DE SIMBOLOS

A	12.2		*f*	12.7	
A	91.3		F	46.1	
A	40.8		*F*	12.7, 66.15	
Arg( )	66.13:	Arg(*R*)	(Fld)	63.8:	(Fld *R*)
AV( )	66.13:	AV(*R*)	gs	66.10	
B	12.2, 42.2,		I	42.2	
B	66.16		*I*	25.1, 64.11, 91.3	
Bord	85.5		*in*	91.3	
C	12.2, 42.2,		J	12.5, 43.4	
C	66.12		J	13.3:	J_k
C_*	43.4		*J*	64.12	
C( )	54.2:	C(α)	K	12.2, 42.2	
Cl	66.05		L	12.5, 14.3	
Cl ex	85.5		M	12.5, 14.3	
Cls	64.31		min(,)	75.5:	min(*a*, *b*)
(Cndm)	63.7:	(Cndm *R*)	min	85.5:	$\min_P$
cnv	44.9		max(,)	75.6:	max(*a*, *b*)
Cnv	66.07		N	12.2, 14.3	
connex	64.15		*N*	91.3	
D	12.5, 66.11		Nc	81.3	
(Dm)	63.6:	(Dm *R*)	Nc( )	81.3:	Nc(α)
E	12.2, 51.3		NC	81.3	
E	40.8		*ng*	91.3	
E!	26.3, 64.44		NO	85.5	
E!!	64.45		Nr	85.4	
(E)	21.1:	(E*x*)	NR	85.4	
exp	84.8, 86.4		*p*	55.4	
$\exp_r$	86.4:	$\mu \exp_r \nu$	$\dot{p}$	60.63	
f	11.2		pd( )	75.2:	pd(*n*)

po	66.20:	R_{po}	W	42.2	
Pot	66.23		X	12.5	
Potid	66.24		Z	43.5; 43.8:	Z_i
Prod	84.8, 86.4		⅁	66.11	
Q	41.4		∃	21.1:	$\exists x$
Rl	66.05		(∃)	21.1:	$(\exists x)$
rm(,)	76.4:	rm(a, b)	∃!	26.3, 53.6	
s	55.4		∃̇!	60.34	
$\dot{s}$	60.63		Λ	51.4	
S	43.4, 81.52		Λ̇	60.24	
S |	94.1:	$S_i^x A\|$	$\delta(\,)$	75.2:	$\delta(n)$
SC( )	66.05:	SC(A)	$\delta(,)$	76.2:	$\delta(a, n)$
Ser	85.5		∈	22, 52.1, 66.02	
sg	66.10		$_{\in}$	66.17:	$R_{\in}$
sg( )	75.3:	sg(n)	ε	77.2:	εy
$\overline{\text{sg}}$( )	75.4:	$\overline{\text{sg}}(n)$	ε	27.2:	ε_x
sm	81.1, 81.2		$\bar{\in}$	66.03	
sm	91.3		$\notin$	66.03	
$\overline{\text{sm}}$	81.1		η	27.1:	η_x
smor	85.3		ι	26.2, 64.21, 64.46	
$\overline{\text{smor}}$	85.2		ι	32.21	
st	66.21:	R_{st}	λ	06.2, 40.2:	λx
{Sub in			μ	77.1:	μy
: for }	94.1:	{Sub in A: t for x}	o	32.21	
			$\rho(,)$	76.4:	$\rho(a, b)$
t	11.2		ω	30.5	
t	12.7		$\triangle$	54.52:	$\alpha \triangle \beta$
T	13.42, 43.4		Δ	66.31:	$\in_{\Delta}{}'\kappa$
trans	61.7		$\Subset$	66.02	
ts	66.22:	R_{ts}	Ξ	46.2	
U	51.4, 56.6, 60.23		$\prod$	12.62:	$\prod_{i=1}^{i=n} p_i$
V	51.4, 52.1, 60.23		$\prod$	22:	$\prod x$
V̇	60.23		$\prod$	22:	$\prod_x$
un	91.3		$\prod$	55.3:	$\prod_{\alpha \in \gamma} \alpha$
USC( )	66.05:	USC(A)	Π	84.7, 86.3	
Val( )	66.13:	Val(R)	Π	40.8, 46.2, 52.2, 91.3	
∀	22:	$\forall x$			

$\sum$	12.63:	$\sum_{i=1}^{i=n} p_i$
$\sum$	22:	$\sum x$
$\sum$	22:	$\sum_x$
$\sum$	55.3:	$\sum_{\alpha \in \gamma} \alpha$
Σ	84.4, 86.2	
Σ	40.8, 52.3	
Υ	43.8	
Φ	43.4	
Ψ	43.4	
Ω	85.5	
$\ni$	51.3	
$\ni$	66.04:	$\ni x$
$\prime$	26.2, 40.9, 64.46	
$\mathfrak{a}$	92.1	
$\mathfrak{A}$	92.1	
$\mathfrak{Afu}$	92.1	
$\mathfrak{Ag}$	92.1	
$\mathfrak{Arg}$	92.1	
$\mathfrak{d}$	83.3	
$\mathfrak{D}$	55.1	
$\mathfrak{f}$	92.1	
$\mathfrak{fu}$	92.1	
$\mathfrak{Fu}$	92.1	
$\mathfrak{k}$	92.1	
$\mathfrak{K}$	92.1	
$\mathfrak{Op}$	92.1	
$\mathfrak{p}$	92.1	
$\mathfrak{pr}$	92.1	
$\mathfrak{r}$	66.14	
$\mathfrak{s}$	92.1	
$\mathfrak{sa}$	92.1	
$\mathfrak{S}$	92.1	
$\mathfrak{Sfu}$	92.1	
$\mathfrak{Sg}$	92.1	
$\mathfrak{v}$	92.1	
$\mathfrak{verkn}$	92.1	
$\mathfrak{vk}$	92.1	
$\mathfrak{V}$	92.1	
$\mathfrak{Vk}$	92.1	
$\mathfrak{z}$	92.1	
$\mathfrak{zfu}$	92.1	
$\mathfrak{zpr}$	92.1	
$\mathfrak{zz}$	92.1	
$\mathfrak{Z}$	92.1	
0	12.7, 13.13, 51.4, 71, 72.2, 81.51	
1	13.12, 51.4, 71	
.	20.4	
.	12.2, 54.3	
,	66.01:	α, x
,	96.4	
‘	64.42:	$R‘a$
‘‘	63.2:	$R‘‘\alpha$
‘‘‘	66.18:	$R‘‘‘\kappa$
‘’	63.9:	$R‘’\alpha$
,,	65.7:	$a \underset{,,}{0} b$
;	60.31:	$a; b$
;	61.3	
;	66.27:	$R;S$
.,	66.28:	$S \underset{,,}{0} b$
!	50.4	
^	20.4, 40.7, 50.4, 51.2, 60.22:	$\hat{x}$
$\sim$	12.2, 15.3, 15.62	
$\simeq$	53.4	
$\simeq_r$	60.46	
&	12.2, 15.3, 15.62	
*	04.5:	$*p$
*	54.52:	$\alpha * \beta$
*	66.19:	R_*
#	14.3	
( )	22:	(x)
(,)	60.31:	(a, b)

$\{\mid\}$	51.3:	$\{A \mid P\}$
[ ]	45.6:	$[x]$
[ ]	66.06:	$[\alpha]$
$-$	96.3	
$-$	12.2:	$-p$
$^-$	12.2:	$\bar{p}$
$-$	32.3:	$\frac{a}{b}$
$^-$	54.2:	$\bar{\alpha}$
$-$	54.2:	$-\alpha$
$-$	54.51:	$\alpha-\beta$
$-$	56.8:	$-x$
$-$	60.52:	$-R$
$^-$	60.52:	$\bar{R}$
$-$	60.53:	$R-S$
$\dot{-}$	60.55:	$\dot{-}R$
$\dot{-}$	60.55:	$R \dot{-} S$
$\dot{-}$	76.2:	$a \dot{-} n$
$\equiv$	12.2, 15.62	
$\equiv$	21.4:	$\equiv_x$
$\not\equiv$	12.5	
$\equiv\!\!\!\equiv$	14.44	
$\mid$	12.5:	$p \mid q$
$\mid$	21.4:	$\mid_x$
$\mid$	61.3:	$R \mid S$
$\mid$	65.4:	$R \mid$
$\mid$	65.4:	$\mid R$
$\parallel$	66.30:	$R \parallel S$
$\mid - \mid$	76.3:	$\mid a-n \mid$
$'$	12.2, 71	
$\backslash$	51.3, 60.22	
$/$	76.5:	a/b
$/$	94.1:	$[t/x]$
$\vdash$	21.7, 95.2, 95.3	
$\Vdash$	96.4	
$\neg$	12.2, 15.3:	$\neg p$
$\ulcorner\urcorner$	08.4, 21.7, 93.6	

$\urcorner\!\llcorner$	56.2	
$\dagger$	61.4, 66.29	
$\Diamond$	14.3	
$\Box$	14.3	
$\vee$	12.2, 15.3, 15.62	
$\bar{\vee}$	12.5	
$\bigvee$	22:	$\bigvee x$
$\bigvee$	22:	$\bigvee_x$
$\mathbf{V}$	55.3:	$\mathbf{V}_{\varphi(x)} f(x)$
$\wedge$	12.2, 15.3	
$\bigwedge$	22:	$\bigwedge x$
$\bigwedge$	22:	$\bigwedge_x$
$\mathbf{\Lambda}$	55.3:	$\mathbf{\Lambda}_{\varphi(x)} f(x)$
$>$	63.4	
$<$	56.4, 63.5	
$\lll$	56.5	
$\langle\,,\rangle$	60.31:	$\langle a, b \rangle$
$\rightarrow$	12.2, 12.35:	$p \rightarrow q$
$\rightarrow$	96.1, 96.4:	$A \rightarrow B$
$\longrightarrow$	66.08:	$\overrightarrow{R}$
$1 \rightarrow 1$	64.33	
$1 \rightarrow \mathrm{Cls}$	64.31	
$\mathrm{Cls} \rightarrow 1$	64.32	
$\leftarrow$	12.2:	$p \leftarrow q$
$\longleftarrow$	66.09:	$\overleftarrow{R}$
$\leftrightarrow$	12.2:	$p \leftrightarrow q$
$\uparrow$	62.1	
$\updownarrow$	86.2	
$\downarrow$	12.5, 64.24	
$\dot{\updownarrow}$	66.32	
$\restriction$	62.3, 62.5	
$\upharpoonright$	62.4, 62.5	
$\downharpoonright$	62.6	
$=$	25.1, 44.6, 53.4, 60.44, 71, 72.3	
$\neq$	53.5, 60.45	
$+$	12.2, 45.5, 54.4,	

	56.8, 73.2, 84.2, 86.2	
$\dotplus$	86.2	
$+_c$	84.3	
$\times$	45.5, 54.6, 62.2, 73.2, 84.5	
$\times_c$	84.6	
$\wedge$	83.7:	$m \wedge n$
$\frown$	91.3	
$\breve{}$	61.2:	$\breve{R}$
$\breve{}$	61.2:	$\breve{}R$
$\supset$	12.2, 15.3, 15.62, 54.53	
$\supset$	21.4:	$\supset_x$
$\Subset$	12.5	
$\subset$	12.2, 53.2, 60.42	
$\Subset$	60.46	
$\subseteq$	53.3, 60.43	
$\subseteq_r$	60.46	
$\Subset$	53.3	
$\Subset$	12.5	
$\asymp$	15.3	
$\bigcup$	22, 55.2, 60.62	
$\cup$	54.4, 60.54	
$\cup$	60.55	
$\bigcap$	22, 55.1, 60.61	
$\cap$	54.3, 60.53	
$\cap$	60.55	
$\curlyvee$	12.7	
$\curlywedge$	12.7, 15.5	
$\dashv$	14.43	
$\dashv$	61.4	
$\circ$	14.45:	$p \circ q$
$\circ$	56.3:	$x \circ y$
$\oplus$	54.52:	$\alpha \oplus \beta$

INDICE ALFABETICO

A

abstracción, 09.4, 40.2, 40.3
— funcional, 44.1
— real, 40.3
— sintáctica, 40.3
abstracto, 44.4, 51.2, 60.22
— doble, 60.22
abstractor, 44.4
afirmación, 10.32
alcance de la descripción definida, 26.5
— — descripción funcional, 64.44
— de los operadores lógicos, 16
álgebra, 09.2, 09.3
ambigüedad de la barra triple, 12.36
— — flecha, 12.35
— — tilde, 12.34
ancestral, 66.19, 81.53
— propio, 66.20
ancestralidad, 66.25
— propia, 66.25
antecedente de secuencia, 96.4
aplicación, 40.1, 40.4, 41.2
— como concepto primitivo de lógica combinatoria, 40.1
— operativa, 40.4
— real, 40.4, 41.2
— sintáctica, 40.4
argumento de una función, 05.3, 40.1
aritmética, 70.1, 80
— recursiva, 74
asociación por la izquierda, 16.51
atributo, 05.7, 20.3, 40.7, 50.1
— no vacío, 21.1
— universal, 21.1
axioma, 01.12
— esquema, 72.1
— — de extensionalidad, 50.4
— — reducibilidad, 50.4
axiomas de Peano, 71, 80
— — — que se pueden probar en un sistema de lógica, 80
axiomatización de la aritmética, 09.6

C

cálculo D, 15.5
cálculo de clases, 09.4, 50.1
— funcional, 09.5, 20.1, 30.2, 30.3, 30.4
— — binario, 30.6
— — modal de primer orden intuicionista, 24.5
— — — de primer orden, un ejemplo de, 24.4
— — de orden omega, 30.5
— — de primer orden, 20.1, 30.1, 50.1, 90.5
— — de primer orden con identidad, 25, 72.3
— — de primer orden intuicionista, 24.2, 24.3
— — de primer orden, no clásico, 24
— — de primer orden, un ejemplo, 23
— — de segundo orden, 30.2
— — simple, 30.6

— — de tercer orden, 30.3
— de individuos, 56.1
— inferencial, 96.4
— L, 96.4
— minimal de Johansson, 15.5
— polivalente, 13.01
— proposicional, 10.1
— — de Brouwer-Heyting, 15.21
— — intuicionista, 15.1
— — no clásico, 13.01
— de relaciones, 09.4
campo de una relación, 62.6, 63.8, 66.12
cancelador elemental, 43.3
cero, 80, 81.5
— como el número cardinal de la clase vacía, 81.51
— definido como el conjunto nulo, 82.2
cierre, 66.19
— de una fórmula, 21.7
circuito secuencial, 43.8
círculo suma, 54.5, 54.52
clase, 05.8, 40.7, 50.1, 50.2, 50.3, 82.1
— de clases de las que una clase dada es una subclase, 66.06
— — — de predecesores de miembros de una clase, 66.09
— — — seleccionadas de una clase de clases, 84.8
— como extensión de una propiedad, 05.8
— considerada como el resultado de una operación, 65.7
— de correlatores cardinales de dos clases, 81.1
— — — ordinales, 85.2
— hereditaria, 66.19
— nula, 51.4
— — diferenciada de clase vacía, 51.4
— de números, 81.3
— — — naturales, 81.5
— — — ordinales, 85.5
— — — de relación, 85.4
— — predecesores, 66.08
— producto aritmético de clases, 65.7
— propia, 82.1
— de relaciones bien ordenadas, 85.5
— — relaciones selectivas de una clase de clases, 66.31
— — relaciones de series, 85.5
— — series, 85.5
— — sucesores, 66.09
— — subclases unitarias de una clase, 66.05
— — subclases de una clase, 66.05
clase de todas las clases, 82.1
— unitaria, 64.2
— universal, 51.4
— vacía, 51.4, 81.51
clases equinumerosas, 81.1
— similares, 81.2
— no solapadas, 66.32, 84.2
codominio, 63.7, 66.11
— de una relación, 66.13
combinación, 41.1, 43.1
— como aplicación sintáctica, 40.4
combinador, 42.6, 43.7
— propio, 43.2, 43.3, 43.4, 43.7, 45.1
combinadores definidos como abstractos, 45
— propios numéricos, 45.4
comillas, 08.3, 08.4, 93.1
compatibilidad, 14.45
completud del cálculo funcional de primer orden, 90.5
complemento de una clase, 54.2
compositor elemental, 43.3
concatenación, 91.3
— binaria, 91.3
conectiva, 06.1
— más que binaria, 12.6
— proposicional, 10.22
conectivas normales de Łukasiewicz, 13.21
conexión de relaciones, 64.15
conjunción, 10.42, 96.4
— en lógica intuicionista, 15.23
— — — polivalente, 13.24
conjunto, 05.8, 50.2, 82.1
— y clase comparados, 82.1
— de números naturales, 82.2
connotación, 04.3
consecuente de secuencia, 96.4
consistencia, 14.45, 90.4
— de las matemáticas clásicas, 90.4
constante, 03.1, 30.7

— proposicional, 12.7
— individual, 20.2
constantes matemáticas, 91
conversión, 44.6
— lambda, 09.4, 40.4, 44, 44.6, 65.2
correlator cardinal, 81.1, 81.2
— ordinal, 85.2, 85.3
cuasicomillas, 08.4, 21.7, 93.6
cuantificación vacía, 21.5
cuantificador, 06.3, 14.2, 21.1
— existencial, 21.1
— existencial como operador de disyunción infinita, 21.2
— universal, 21.1
— universal como operador de conjunción infinita, 21.2.

D

deducción dentro de un sistema, 96
— natural, 96.2
definición contextual, 02.2, 26.43, 50.4
— recursiva, 73.2, 73.6, 75.1
— — del cociente de, 76.5
— — de la diferencia, 76.2
— — de la multiplicación, 73.4
— — del predecesor de, 75.2
— — del resto de la división, 76.4
— — de la suma, 73.3
demostrabilidad, 95
— como derivabilidad a partir de axiomas, 95.1
denotación, 02.1, 04.3, 32.6
derivabilidad, 95, 95.1, 96.1
descripción cuasidefinida, 27
— definida, 26, 26.1, 40.9, 64.43, 64.44 64.46
— funcional, 64.43, 64.44, 64.46
— funcional plural, 63.2
diferencia, 54.51
— simétrica, 54.52
dificultades de la teoría de tipos para definir los números, 81.6
discreción, 56.2
disyunción, 96.4
— no exclusiva, 10.43
— — — en lógica polivalente, 13.25
— en lógica intuicionista, 15.24
diversidad, 64.12
división, 76.1
doble negación en lógica intuicionista, 15.22
dominio, 62.1, 62.3, 65.1
— converso, 63.7
— converso de una relación, 61.2, 65.1, 66.07
— de definición de una función, 05.3
— de una relación, 63.6, 66.13
duplicador elemental, 43.3

E

elementalidad, 50.3
elemento nulo, 56.1
— de una clase, 50.3
equivalencia, 10.46
— estricta, 14.44
— formal, 21.4
— en lógica intuicionista, 15.26
— en lógica polivalente, 13.27
— material, 04.5, 10.46
— de proposiciones, 04.5
esquema de deducción, 96.1
estratificación, 31.4, 50.3
exclusión mutua, 56.1
exponenciación, 84.1
— aritmética de clases, 84.8
— — de números cardinales, 84.8
— definida en términos de potencias relativas de la relación sucesor, 83.7
— denotada mediante combinador propio, 43.6
— de números de relación, 86.4
— de relaciones, 86.4
expresión impropia, 05.1
— propia, 05.1
extensión, 05.8
extensionalidad para clases, 05.8, 53.4
— — funciones, 05.6
— — relaciones, 05.9

F

fbf, 01.11
figuras de flechas para relaciones, 60.1

forma, 05.2
— asociada de una función, 05.4, 06.1, 06.2, 40.2
fórmula, 21.1
— atómica, 20.3, 72.3
— de Barcan, 24.5
— bien formada, 01.11, 21.1
función, 05.3, 40.1, 66.14
función asociada de una conectiva proposicional, 10.22
— descriptiva, 63.1, 63.2, 64.43
— — plural, 63.2
— idéntica a su relación asociada, 66.13
— de identidad en lógica polivalente, 13.22
— — individuos, 20.1
— modal, 14.41
— mu, 77.1
— de negación en lógica polivalente, 13.23
— proposicional, 05.7, 64.42, 65.1
— — de individuos, 20.1
— — predicativa, 51.2
— no proposicional, 64.42, 65.1
— y relación asociada identificadas, 66.14
— sucesor, 81.5
— — definida, 81.52
— veritativa, 10.23, 10.47
funciones veritativas, interdefinibilidad, 12.4
fusión, 56.6

H

hipótesis, 96.2

I

identidad, 25.1, 25.2, 25.3, 30.8, 41.4, 53.4, 64.11, 66.19, 66.24
— en el campo de una relación, 64.13
— de individuos, 30.8
identificador elemental, 43.3
igualdad de clases, 53.4
implicación, 10.44
— causal, 10.44
— estricta, 10.44, 14.43
— formal, 21.4
— material, 10.44, 14.1, 54.53
— — inversa, 10.45
— en lógica intuicionista, 15.25
— — lógica polivalente, 13.26
inclusión, 53.2, 56.1, 66.05
— mutua, 53.4
— propia, 53.3, 66.05
— relacional, 60.42
incompletud del cálculo funcional, 90.5
indicación explícita de tipo, 32
— implícita de tipo, 33
individuos, 05.7, 20.1, 26.41, 30.1
— producto, 56.7
— suma, 56.6
inducción matemática, 43.8, 71
— transfinita, 82.2
iniciador, 66.16
interconvertibilidad, 44.6
interdefinibilidad en lógica intuicionista, 15.27
— del operador lambda y combinadores, 42.6, 45.6
interpretación, 01.13
— de lógica intuicionista, 15.4
— de un lenguaje formalizado, 07.1
— de secuencias, 96.4
— de un sistema, 90.3
intersección de clase de clases, 55.1
— de clases, 54.3
— relacional de, 60.63
— — de la clase de relaciones, 60.61
intervalo, 66.26
iota invertida usada en descripciones definidas, 26.5, 64.46

L

Leerstellen, 20.4
lenguaje formalizado, 01.1
— interpretado, 01.14
— objeto, 08.1, 91.1
ley asociativa, 61.3, 91.3
listas de pares para relaciones, 60.1
lógica alética modal, 14.3
— combinatoria, 09.4, 16.32, 32.25, 40.4, 42, 52.2, 64.11

— intuicionista, 14.2, 15.2, 24.2, 24.3, 24.5
— intuicionista relacionada con lógica modal, 15.4
— matemática, 09.1
— minimal, 15.27
— modal, 14.1
— modal análoga a la lógica cuantificada, 14.52
— polivalente conteniendo lógica bivalente, 13.29
— simbólica, 09.1
— sin variables, 03.2

M

mapa de una clase por una relación, 63.2
— — — relación por una relación, 66.27, 85.2
matrices de Schröder para relaciones, 60.1
membrecía, 66.02
Menge, 82.1
mereología, 56.1
metalenguaje, 08.1, 91.1
metamatemáticas, 90.1, 90.4
método de decisión, 13.17
— — definición de números de von Neumann, 82
métodos de eliminación de paréntesis, 16.4
— finitarios, 90.4
miembro seleccionado de una clase, 66.31
mínimo miembro de una subclase, 85.5
modalidad, 14.41
modo autónimo de hablar, 93.1
modos de definir la suma y la multiplicación de números naturales en un sistema formal, 83.1
multiplicación, 45.5, 73.1, 83.1, 84.1
— definida en términos de potencias relativas de la relación sucesor, 83.6
— denotada por combinador propio, 43.6
— de un número infinito de clases, 84.7

N

necesidad, 14.3
negación, 10.33, 13.41, 15.61
— cíclica, 13.41
— de Fitch y negación intuicionista comparadas, 15.61
— — un individuo, 56.8
no identidad, 53.5, 64.12, 85.5
nombre, 02.1
— propio, 03.1
nombres para expresiones, 93
notación algebraica, 09
— de Fitch para la deducción natural, 96.3
— — lógica combinatoria, 41
— para una función no proposicional 65.2
— polaca, 14.3, 16.12, 16.32, 16.6
núcleo, 56.7
numerales como indicadores de tipo, 32.4
número cardinal, 83.2, 84
— — comparado con el número natural, 81.4
— — definido por similitud, 81
— — finito, 81.4, 83.1, 83.2
— — inductivo, 81.4, 83.1, 83.2
— — de una clase, 66.32, 81.3
— como conjunto comparado con número como clase de clases de *n* miembros, 82.3
— definido como conjunto, 82.2
— — — conjunto de predecesores, 82.2
— — — una clase de clases similares, 81.3
— — en lógica combinatoria, 43.5, 80
— — — teoría de conjuntos, 80, 82.1
— natural, 72.1
— — como número cardinal finito, 81.4
— — definido, 81.53
— ordinal como un tipo de número de relación, 85.5
— de relación, 81.4
— — — de una relación como clase de relaciones similar ordinalmente a la relación, 85.4

— — — y número cardinal comparados, 85.4
— transfinito, 82.2
números de relación como extensión de los números ordinales, 85.1
— — — definidos mediante similitud ordinal, 85
— — — y números cardinales, 85.1
— ordinales como números de relación de series bien ordenadas, 85.5

O

ocurrencia libre de una variable, 06.5, 21.6
— ligada de una variable, 06.4, 21.6
omisión del símbolo de conjunción, 12.33
— — — de disyunción, 12.33
operación, 06.1
operaciones aritméticas con números cardinales, 84
— — con números naturales, definidas por medio del ancestral, 83
— — con números de relación, 86
— inversas, 76
operador, 06.1
— como prefijo, 16.12
— — sufijo, 16.12
— intercalado, 16.12
— lambda, 06.2, 32.25, 40.2, 40.4, 42.6, 44, 45
operadores lambda múltiples, 32.25
operando, 06.1
orden, 30, 50.4
— de un cálculo funcional, 31.3
— — preservación, 85.2
— — sustitución, 94.3
— — un tipo, 31.3

P

par, 64.26
— cardinal, 64.22
— no ordenado, 64.22
— ordenado, 05.9, 54.6, 60.1, 60.31, 62.2, 64.26, 65.7, 67.3
— — como clase de clase unitaria y par no ordenado, 64.26
— ordinal, 60.1, 60.31, 64.24, 65.7, 66.27, 66.32, 84.2, 84.5
"paradoja" de la implicación material, 14.1
— — Richard, 50.4
— — Russell, 43.8
— semántica, 50.4
paréntesis, 16.21, 16.22, 16.6
parte propia, 56.5, 60.43
permutador elemental, 43.3
pertenencia a clases, 52.1
posibilidad, 14.3
posteridad, 66.25
— propia, 66.25
potencia cero como la relación de identidad, 61.5
— — de una relación, 61.5, 64.13, 66.19, 66.24
— de un número comparada con la potencia relativa de una relación, 83.7
— relativa de una relación, 61.5
potencias cardinales de una relación, 83.2
— enteras negativas de una relación, 61.6
— racionales de una relación, 61.6
— reales de una relación, 61.6
predecesor, 63.4, 63.6, 66.08
principio de extensionalidad, 51.5
probabilidad, 90.2
— en lógica intuicionista, 15.24
producto aritmético de clase de clases, 84.7
— — — dos clases, 84.5
— — — dos números cardinales, 84.6
— — — números de relación, 86.3
— — — dos relaciones, 86.3
— cartesiano, 54.6, 62.2, 65.7
— cruzado, 54.6
— directo, 54.6
— de individuos, 56.8
— lógico de clase de clases, 55.1
— — de clases, 54.3
— — relacional de la clase de relaciones, 60.61
— de los números de relación de las

relaciones del campo de una relación, 86.3
— relativo, 61.3
programa de Hilbert, 90.4
propiedad, 02.2, 05.7, 20.3, 30.1, 50.1
— de *n*-ésimo orden, 31.3
— de primer orden, 31.3
— — segundo orden, 31.3
— predicativa, 50.4
proposición, 04.1, 10.21
— como función de cero argumentos, 30.7
— — sentido de una sentencia, 04.2
proyección de una clase mediante una relación, 63.2
— — — relación mediante una relación, 66.27, 85.2
prueba subordinada, 96.3

R

rango de argumentos, 05.5
— de funcionalidad, 66.14
— de una variable, 03.2
— de valores de una función, 05.3
— del argumento secundario, 05.5
— entre operadores, 16.31
recursión, 43.8
reducción de modalidades, 14.53
reflexividad, 64.14
— total, 64.14
regla de conversión alpha, 44.8
— — conversión beta, 44.8
— — — eta, 44.8
— — — lambda, 44.7
— — extensionalidad, 42.2
— — formación, 01.11, 01.13
— — inferencia, 01.12, 72.3
— — reemplazo por identidad, 42.2
— semántica, 01.14, 07.1
— de transformación, 01.12, 01.13
— zeta, 14.2
relación, 05.9
— aritmética, 61.2
— asociada de una función, 64.42, 66.14
— bien ordenada, 85.5
— como clase de *n*-tuplos ordenados, 67.3
— — clase de pares ordenados, 60.1
— — función proposicional, 67.1
— compacta, 61.7
— de la clase de potencias distintas de cero de una relación con esa relación, 66.23
— — la clase de subclases de una clase con la clase misma, 66.05
— — la clase de subrelaciones de una relación dada con esa relación misma, 66.05
— — discreción, 56.1
— — identidad, 61.5
— en extensión, 05.9
— — intensión, 05.9
— de intersección de, 55.4
— iota, 64.46
— irreflexiva, 85.5
— de más de dos términos, 67
— — membrecía, 66.02
— misma, 05.9, 20.3, 40.7
— parte-todo, 56.1, 56.4
— de producto lógico de, 55.4
— selectiva para una clase de clases, 66.31, 84.7
— simétrica, 61.2
— de similitud ordinal, 85.3
— sucesor, 81.53
— de suma lógica de, 55.4
— transitiva, 61.7
— de unión de, 55.4
— universal, 60.23, 62.1, 62.2
— uno-uno, 64.33
— vacía, 60.24
— no vacía, 60.34
— uno-varios, 64.31, 66.13, 66.14
— varios-uno, 64.32, 66.13, 66.14
relaciones asociadas a funciones, 64.4
— similares ordinalmente, 85.2, 85.3
— similares relacionalmente, 85.3
— no solapadas, 86.2
representación de funciones no proposicionales por medio de sus relaciones asociadas, 65
retroalimentación de circuitos sentenciales, 43.8
retroyección de una clase por una relación, 63.3

S

secuencia, 96.4
selección, 66.31
semántica, 01.13, 90.1, 90.4
sentencia como nombre de proposición 04.4
— — nombre del valor veritativo de una proposición, 04.2
— formal, 04.1
sentido, 02.1, 32.6
serie, 85.5
— bien ordenada, 85.5
significado, 01.13, 01.14, 02.1
símbolo de función, 20.3
— primitivo, 01.11
símbolos de metalenguaje en Carnap, 92.1
similitud de clases, 81.1
sintaxis, 01.13, 90.1, 90.4
sistema de lógica sin variables, 42.2
— M, 14.53, 24.5
— M′ 14.53, 15.4
— M″, 14.53
— no interpretado, 01.14
— S2, 14.53
— S4, 14.53, 15.4
— S5, 14.53
— semántico, 07.1
— sintáctico, 07.1
solapación, 56.3
— relación de, 56.1
subclase, 53.2
— propia, 53.3
subrelación, 94
sucesor, 63.5, 63.7, 66.09, 71, 80
suma, 73.1, 83.1, 84.1
— aritmética de clase de clases, 84.4
— — — clases, 84.2
— — — dos clases, 84.2
— — — dos números cardinales, 84.3
— — — dos relaciones, 86.2
— — — números cardinales, 84.2
— — — números de relación, 86.2
— — — números de relación de relaciones del campo de una relación, 86.2
— como unión de dos clases de pares ordinales, 84.2
— definida en términos de potencias relativas de la relación sucesor, 83.5
— denotada por combinador propio, 43.6
— de individuos, 56.8
— de infinito número de clases, 84.4
— lógica de clase de clases, 55.2
— — — clases, 54.4
— — relacional de la clase de relaciones, 60.62
— relativa, 61.4
superescrito, 20.5
sustitución, 94
sustracción, 76.1

T

tabla veritativa, 10.23, 10.47
— — para la conjunción, 11.4
— — — la disyunción, 11.5
— — — la equivalencia material, 11.5
— — — la implicación material, 11.5
— — — la implicación material inversa, 11.5
— — — la negación, 11.3
tablas veritativas abreviadas, 11.5
— — para lógica polivalente, 13.17, 13.18
teorema, 01.12, 55.2
teoría axiomática elemental de números, 73.5
— de combinadores y teoría de conversión lambda comparadas, 44.6
— — conjuntos, 09.4, 09.5, 50.2, 70.1, 82.1
— — las descripciones de Russell, 02.2, 26
— — funcionalidad, 46.1, 46.2
— libre de tipos, 31.4
— de números naturales, 72.1
— — relaciones y teoría de clases comparadas, 60.1
— simple de tipos, 31.2, 31.3, 50.4
— de tipos, 09.5, 31 ff, 50.4, 81.6
— — tipos ramificada, 31.2, 31.3, 50.4
tercio excluso, 15.1, 15.61, 24.3, 24.5
terminología matemática y lógica com-

paradas para dominio y codominio, 66.13
términos, 72.2
— primitivos de los axiomas de Peano 71
tipo, 31 ff, 50.4
— de constante y variable funcional, 31.1
— para operadores, 32.26
tipo relativo de los números, 81.6
tipos de paréntesis, 16.23

U

unión de clases, 54.4
— — clase de clases, 55.2
— — clases unitarias, 64.22
— relacional de, 60.63
— relacional de la clase de relaciones, 60.62
universalidad, 52.2
— ilimitada, 46.2
— restringida, 46.2
uso autónimo, 93.2
— de comillas, 08.2 ff
— — — simples, 08.2
— — corchetes, 06.1

V

validez, 90.5
valor absoluto, 76.3
— de una función, 05.3, 40.1
— — una variable, 03.2
— veritativo, 04.1 ff
— — como propiedad de una proposición, 04.4
— — como proposición, 04.5
— — designado, 13.01, 13.02, 13.15
— — no designado, 13.15
— — de una proposición, 10.21
variable, 03.2
— como nombre indeterminado, 03.2
— funcional, 20.3
— libre, 21.6
— ligada, 21.6
— ligadora, 06.1, 40.4
— de metalenguaje, 08.1, 91.4
— — — en este Diccionario, 08.2, 08.4, 08.5
— predicativa, 20.4, 72.1
— de propiedad, 30.2
— para individuos, 20.2
— para relaciones, 60.2
— proposicional, 12.1
variables metalingüísticas, 91
verdad como valor designado, 13.01
— en un sistema, 90.3
— en un sistema no definible dentro de ese sistema, 90.3
vinculación, 10.44

Y

yuxtaposición, 12.33, 16.13, 91.3

OTROS LIBROS PUBLICADOS POR PARANINFO DENTRO DE LA COLECCION

Lógica y Teoría de la Ciencia

BOCHENSKI. — Compendio de lógica matemática.
BOUDOT. — Lógica inductiva y probabilidad.
GARDIES. — Lógica del tiempo.
MARTINEZ FREIRE. — Filosofía de la ciencia empírica.

En prensa:

HAACK. — Lógica divergente.
BOOLE. — Una investigación sobre las leyes del pensamiento.
HUNTER. — Metalógica (Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden).
WHITEHEAD y RUSSELL. — Principia matemática.
HAMILTON. — Lógica para matemáticos.
ALWOOD, ANDERSON y DAHL. — Lógica en Lingüística.
THIBAUD. — La lógica de Charles Sanders Peirce.

LIBROS DE MATEMATICAS PUBLICADOS POR PARANINFO

ANTONOV, VYGODSKY, NIKITIN y SANKIN. — 1.000 problemas de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría (1976).
BAJPAI, CALUS y HYSLOP. — Ecuaciones diferenciales. Texto programado (1974).
BERGTOLD. — Matemáticas para radiotécnicos (1969).
BERMAN y BEZARD. — Matemáticas para papá (2.ª edición, 1975).
BRAY, CROXTON, MARTIN. — Análisis matricial de estructuras (1978).
BREUER. — Iniciación a la teoría de los conjuntos (1970).
CALOT. — Curso de estadística descriptiva (2.ª edición, 1974).
CALUS y FAIRLEY. — Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales (1973).
DEMIDOVICH. — 5.000 problemas de análisis matemático (1976).
DEMIDOVICH, BARANENKOV y otros. — Problemas y ejercicios de análisis matemático (5.ª edición, 1976).
DEMIDOVICH y MARON. — Cálculo numérico fundamental (1977).
DEMIDOWITSCH, MARON y SCHUWALOWA. — Métodos cifrados de análisis (en prensa).

DOMS. — La estadística ¡Qué sencilla! (3.ª edición, 1976).

FADEEVA. — Métodos de cálculo de álgebra lineal (2.ª edición, 1973).

FEYEL y A. DE LA PRADELLE. — Ejercicios sobre funciones analíticas (1978).

GOLSTEIN y YOUDINE. — Programación lineal. (Problemas y aplicaciones.) (1976).

HOERNES. — Introducción al álgebra de Boole (2.ª edición, 1977).

LABORDE. — Tablas numéricas de funciones elementales (1966).

LABROUSSE. — Estadística, 3 tomos:

LOURENCO. — Control estadístico de calidad (1974).

LIJOLETOV y MATZKEVICH. — Problemas de matemática superior, teoría de probabilidades y de estadística matemática (1976).

MARAVALL. — Cálculo de probabilidades y procesos estocásticos (1974).

MARON. — Problemas sobre cálculo de una variable (1975).

MATHER. — Análisis estadístico en biología (1971).

MITCHELL. — Matemáticas medias para técnicos radioeléctricos (1970).

MORGAN. — Introducción a los procesos bayesianos de decisión estadística (1971).

MUELLER. — Las nuevas matemáticas en la Educación General Básica (1972).

NIXON. — Transformación de Laplace (1970).

PARZEN. — Procesos estocásticos (1972).

QUINET. — Curso elemental de matemáticas superiores, 6 tomos.

QUINET y PERRAUDEU. — Curso elemental de matemáticas superiores. (Soluciones de ejercicios a los tomos I, II y III.) (1968).

RIOS. — Algebra lineal y geometría vectorial (1975).

RIOS. — Análisis estadístico aplicado (2.ª edición, 1976).

RIOS. — Matemática aplicada (1975).

RIOS. — Matemática C.O.U. (1978).

RIOS. — Matemáticas especiales (2.ª edición, 4.ª tirada, 1975).

RIOS. — Matemática finita (3.ª edición, 1975).

SCHROM. — Tablas de logaritmos (1973).

SEMA. — Iniciación a la práctica de las estadísticas (1971).

SMIRNOV y OUNIN-BARKOWSKI. — Curso de cálculo de probabilidades y de estadística matemática (1978).

TROPPER. — Teoría de matrices aplicadas a la electricidad y a la electrónica (1967).

VEEN. — Introducción a la teoría de la investigación operativa (1971).

VENTSEL y OVCHAROV. — Problemas de cálculo de probabilidades (con soluciones) (1978).

WILLIAMS. — Aritmética. Texto semi-programado (1972).

ZISMAN N. — Topología algebraica elemental.

Magallanes, 25.—Madrid-15.